目　　录

第　一　届

第一届国际数学奥林匹克于一九五九年七月二十三日在罗马尼亚开幕，七月二十四日至二十五日正式比赛。参加的国家有：罗马尼亚，保加利亚，匈牙利，德意志民主共和国，波兰，苏联，捷克斯洛伐克。

竞　赛　题

题1　证明：对于任意自然数 n，分数 $\dfrac{21n+4}{14n+3}$ 不可约。

（波兰，5分）*

题2　在实数范围内解方程：

(1) $\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=\sqrt{2}$；

(2) $\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=1$；

(3) $\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=2$。

（罗马尼亚，8分）

题3　已知关于 $\cos x$ 的二次方程：

$a\cos^2 x+b\cos x+c=0$，

---

* 括号内第一项国名是指该题命题的国家，第二项分数是指该题全对时的得分。下同。

其中 a、b、c 为已知实数。求作一个二次方程，使它的根为 $\cos 2x$ 的对应值。当 $a=4$、$b=2$、$c=-1$ 时，对已知方程与作出的新方程进行比较。（匈牙利，7 分）

题 4 已知直角三角形 ABC 的斜边 c，斜边上的中线是两条直角边的比例中项，求作这个直角三角形。

（匈牙利，5 分）

题 5 在平面上已知一线段 AB，M 为 AB 上任一点，在 AB 的同一侧分别以 AM 与 BM 为一边作正方形 $AMCD$ 与 $BMEF$，这两个正方形的外接圆除相交于点 M 外，还相交于点 N。

（Ⅰ）证明：直线 AE 与 BC 相交于点 N；

（Ⅱ）证明：不论点 M 在线段 AB 上的位置如何，直线 MN 总通过同一点；

（Ⅲ）求当点 M 在线段 AB 上运动时，上述两个正方形中心连线的中点的轨迹。（罗马尼亚，8 分）

题 6 两个平面 P 与 Q 相交于直线 p，已知点 A 在平面 P 上，点 C 在平面 Q 上，它们都不在直线 p 上。求作一个等腰梯形 $ABCD$，它的两底为 AB、CD，使这个梯形存在内切圆，并且点 B 在平面 P 上，点 D 在平面 Q 上。

（捷克斯洛伐克，7 分）

题　　解

题 1 用反证法．假定分数 $\frac{21n+4}{14n+3}$ 可约，设 $21n+4$ 与 $14n+3$ 有公因数 d，d 为大于 1 的自然数。即 $21n+4$ 与 $14n+3$

都能被 d 整除。因为

$$21n+4=(14n+3)+(7n+1),$$

所以 $7n+1$ 能被 d 整除。又因

$$14n+3=2(7n+1)+1,$$

可得1能被 d 整除，这与假设 d 为大于1的自然数矛盾。因此，$\dfrac{21n+4}{14n+3}$ 不可约。

题 2　方程未知数的容许值为 $x\geqslant\dfrac{1}{2}$。并且由

$$(\sqrt{2x-1}+1)^2=2(x+\sqrt{2x-1}),$$

$$(\sqrt{2x-1}-1)^2=2(x-\sqrt{2x-1})$$

得

$$\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}=\frac{1}{\sqrt{2}}|\sqrt{2x-1}+1|$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{2x-1}+1),$$

$$\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=\frac{1}{\sqrt{2}}|\sqrt{2x-1}-1|$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1-\sqrt{2x-1}) & \text{当}\dfrac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1\text{时,}\\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{2x-1}-1) & \text{当}x>1\text{时.}\end{cases}$$

① 当 $\dfrac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1$ 时，有

$$\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}[(\sqrt{2x-1}+1)+(1-\sqrt{2x-1})]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot 2=\sqrt{2},$$

可见，$\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1$ 内的一切实数都是方程(1)的解，但不是方程(2)、(3)的解；

② 当 $x>1$ 时，有

$$\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}[(\sqrt{2x-1}+1)+(\sqrt{2x-1}-1)]$$

$$=\sqrt{2}\cdot\sqrt{2x-1}.$$

这时，方程(1)就是

$$\sqrt{2}\cdot\sqrt{2x-1}=\sqrt{2}$$

得 $$x=1.$$

由于 $x=1$ 不在 $x>1$ 的范围内，所以方程(1)在 $x>1$ 内无解；

方程(2)就是

$$\sqrt{2}\cdot\sqrt{2x-1}=1,$$

得 $$x=\frac{3}{4},$$

由于 $x=\frac{3}{4}$ 不满足 $x>1$，所以方程(2)在 $x>1$ 内无解；

方程(3)就是

$$\sqrt{2}\cdot\sqrt{2x-1}=2,$$

得 $$x=\frac{3}{2},$$

综上所述：

方程(1)的解为$\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1$的一切实数$x$；

方程(2)没有实数解；

方程(3)的解为$x=\frac{3}{2}$.

题3 将已知方程改写为

$$a\cos^2x+c=-b\cos x,$$

两边平方，得$a^2\cos^4x+2ac\cos^2x+c^2=b^2\cos^2x$，

即
$$a^2(\cos^2x)^2+(2ac-b^2)\cos^2x+c^2=0.$$

由于
$$\cos^2x=\frac{1+\cos2x}{2},$$

代入上式得
$$a^2\left(\frac{1+\cos2x}{2}\right)^2+(2ac-b^2)\cdot\frac{1+\cos2x}{2}+$$
$+c^2=0$，变形、整理得

$$a^2\cos^22x+2(a^2+2ac-b^2)\cos2x+$$
$$+(a+2c)^2-2b^2=0,$$

即为所求作的新方程。

当$a=4$，$b=2$，$c=-1$时，已知方程为

$$4\cos^2x+2\cos x-1=0,$$

$a^2=16$， $2(a^2+2ac-b^2)=8$，$(a+2c)^2-2b^2=-4$，

我们得到关于$\cos2x$的方程：

$$4\cos^22x+2\cos2x-1=0.$$

它与已知方程的系数相同。

这时，已知方程的解为$\cos x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$，即有

$$x_1 = k\cdot 360° \pm 72°,\ x_2 = k\cdot 360° \pm 144°$$

（k 为整数）。

$$2x_1 = 2k\cdot 360° \pm 144°, 2x_2 = 2k\cdot 360° \pm 288°.$$

$$\cos 2x_1 = \frac{-\sqrt{5}-1}{4},\ \cos 2x_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

显然满足作出的新方程。

题 4　分析：假定 ΔABC 已作出，如图 1-1 所示。$AB=c$，$\angle C=90°$，显然 C 点在以 AB 为直径的圆周上。

另一方面，设直角三角形斜边 AB 上的中线为 CM，AB 上的高为 CD，则由题设条件应有

$$CM^2 = CA\cdot CB,$$

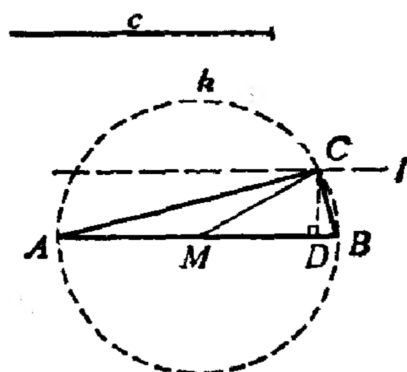


图 1-1

又由　$CM = \frac{1}{2}AB = \frac{c}{2}$，$CA\cdot CB = AB\cdot CD = c\cdot CD$，

可得　$\left(\frac{c}{2}\right)^2 = c\cdot CD$，

$$\therefore\ CD = \frac{c}{4}.$$

因此，点 C 应在与 AB 距离为 $\frac{c}{4}$ 的平行线上。

作法：① 作线段 $AB=c$，以 AB 为直径作圆 k；

② 作直线 $l \parallel AB$，使 l 与 AB 间的距离为 $\frac{c}{4}$；

③ 设直线 l 与圆 k 相交于点 C，连结 CA、CB，则 ΔABC

即为所求作的直角三角形。

证明：在 $\triangle ABC$ 中，由作法①知 $AB=c$，且由 C 点在圆 k 上，故 $\angle C=90°$，又因 AB 上的高 $CD=\frac{c}{4}$，所以 $CA\cdot CB=c\cdot\frac{c}{4}=\frac{c^2}{4}$，而 AB 上的中线 $CM=\frac{1}{2}AB=\frac{c}{2}$，$CM^2=\frac{c^2}{4}$，因此 $CM^2=CA\cdot CB$，即 $\triangle ABC$ 斜边上的中线是两直角边的比例中项。

题 5 以 A 为原点，AB 为 x 轴建立直角坐标系(图1-2)。

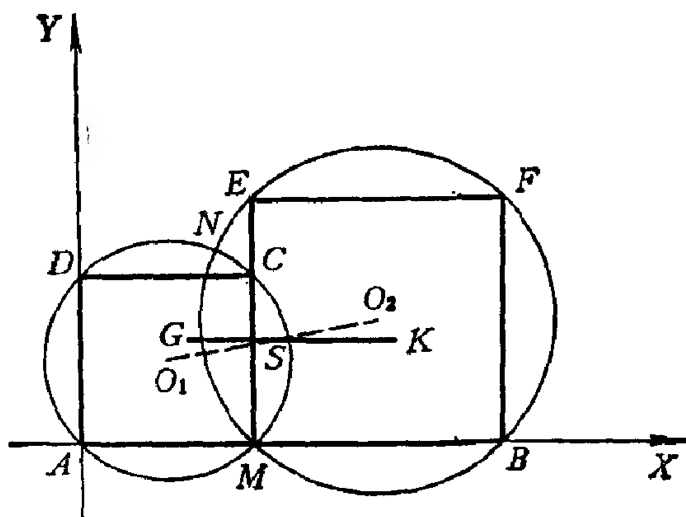


图 1-2

设 $AB=a$，$AM=m(0<m<a)$，则 A、B、M、C、E 各点的坐标分别为：

$A(0,0)$；$B(a,0)$；$M(m,0)$；

$C(m,m)$；$E(m,a-m)$。

正方形 $AMCD$、$BMEF$ 的中心 O_1、O_2 的坐标分别为

$$O_1\left(\frac{m}{2},\ \frac{m}{2}\right);\ O_2\left(\frac{a+m}{2},\ \frac{a-m}{2}\right).$$

正方形$AMCD$的外接圆$\odot O_1$的方程为

$$\left(x-\frac{m}{2}\right)^2+\left(y-\frac{m}{2}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}m\right)^2,$$

即 $$x^2-mx+y^2-my=0. \qquad (1)$$

正方形$BMEF$的外接圆$\odot O_2$的方程为

$$\left(x-\frac{a+m}{2}\right)^2+\left(y-\frac{a-m}{2}\right)^2=\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(a-m)\right]^2,$$

即 $$x^2-(a+m)x+y^2-(a-m)y+am=0. \qquad (2)$$

M、N点是$\odot O_1$与$\odot O_2$的两个交点，它们的坐标是方程(1)、(2)组成的方程组的解。为求N点的坐标，我们解(1)、(2)组成的方程组：

(1)－(2)得 $ax+(a-2m)y-am=0$,

即 $$ax=-(a-2m)y+am \qquad (3)$$

(1)×a^2得 $$(ax)^2-am\cdot(ax)+a^2y^2-a^2my=0 \qquad (4)$$

将(3)代入(4)，消去x得

$$[-(a-2m)y+am]^2-am\cdot[-(a-2m)y+am]+a^2y^2-a^2my=0,$$

即 $$(2a^2-4am+4m^2)y^2-2am(a-m)y=0 \qquad (5)$$

解得 $$y_1=0,\quad y_2=\frac{am(a-m)}{a^2-2am+2m^2},$$

代入(3)得

$$x_1=m,\quad x_2=\frac{am^2}{a^2-2am+2m^2},$$

有 $\begin{cases} x_1 = m \\ y_1 = 0, \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x_2 = \dfrac{am^2}{a^2 - 2am + 2m^2} \\ y_2 = \dfrac{am(a-m)}{a_2 - 2am + 2m^2}. \end{cases}$

这就是说，两圆的交点除$M(m,0)$外，还有

$$N\left(\frac{am^2}{a^2 - 2am + 2m^2},\ \frac{am(a-m)}{a^2 - 2am + 2m^2}\right).$$

（Ⅰ）直线 AE 过点$A(0,0)$与$E(m,a-m)$，其方程为

$$(a-m)x - my = 0 \tag{6}$$

直线 BC 过点 $B(a,0)$与$C(m,m)$，其方程为

$$mx + (a-m)y - am = 0 \tag{7}$$

不难验证，N点的坐标：$x_2 = \dfrac{am^2}{a^2 - 2am + 2m^2}$，$y_2 = \dfrac{am(a-m)}{a^2 - 2am + 2m^2}$既满足(6)，又满足(7)。这就是说，直线 AE 与 BC 相交于点N。

（Ⅱ）直线 MN 过点$M(m,\ 0)$与$N\left(\dfrac{am^2}{a^2 - 2am + 2m^2},\ \dfrac{am(a-m)}{a^2 - 2am + 2m^2}\right)$，其方程为

$$a(x+y) = m(2y+a) \tag{8}$$

显然，对于任意的m值，$x = \dfrac{a}{2}$，$y = -\dfrac{a}{2}$均满足方程(8)。这就是说，不论点M在线段 AB 上的位置怎么样，点

$\left(\frac{a}{2},-\frac{a}{2}\right)$总在直线 MN 上，因此，直线 MN 总通过同一点 $\left(\frac{a}{2},-\frac{a}{2}\right)$.

(Ⅱ) 由于两个正方形的中心 O_1、O_2 的坐标分别为

$$O_1\left(\frac{m}{2},\ \frac{m}{2}\right);\ O_2\left(\frac{a+m}{2},\ \frac{a-m}{2}\right),$$

所以线段 O_1O_2 的中点 $S(x',y')$ 的坐标为

$$x'=\frac{1}{2}\left(\frac{m}{2}+\frac{a+m}{2}\right)=\frac{a+2m}{4},$$

$$y'=\frac{1}{2}\left(\frac{m}{2}+\frac{a-m}{2}\right)=\frac{a}{4},$$

即中点坐标为 $S\left(\frac{a+2m}{4},\ \frac{a}{4}\right)$.

由此可见，对于任意的 m 值，O_1O_2 的中点 S 的纵坐标恒为定值 $\frac{a}{4}$，即点 S 总在直线 $y=\frac{a}{4}$ 上。而由于点 M 在线段 AB 上，即 $0<m<a$，这时 $\frac{a}{4}<\frac{a+2m}{4}<\frac{3a}{4}$，即 $\frac{a}{4}<x'<\frac{3a}{4}$。而当 M 从点 A 连续运动到点 B 时，m 的值就从 0 连续增大到 a，$x'=\frac{a+2m}{4}$ 的值则从 $\frac{a}{4}$ 连续增大到 $\frac{3a}{4}$。由此可见，当点 M 在线段 AB 上运动时，两正方形中心连线的中点的轨迹是一条平行于 AB 的线段，它的两端点是 $G\left(\frac{a}{4},\ \frac{a}{4}\right)$、$K\left(\frac{3a}{4},\ \frac{a}{4}\right)$.

题 6 分析：假定梯形 $ABCD$ 已作出，如图1-3所示。要

使 AB 在平面 P 上，CD 在平面 Q 上，并且 $AB \parallel DC$，必有 $AB \parallel p$，$CD \parallel p$。所以 AB 必在平面 P 上过点 A 且与交线 p 平行的一条直线 m 上，CD 必在平面 Q 上过点 C 且与交线 p 平行的一条直线 l 上。

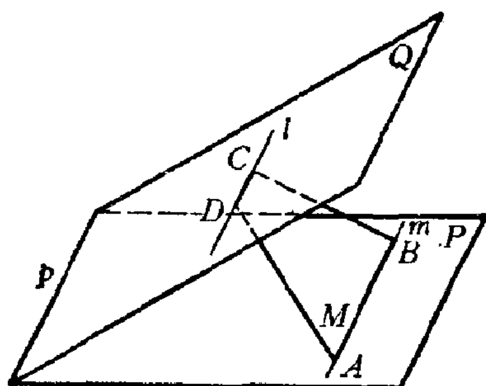


图 1-3

过两平行直线 l、m 作一平面 M，问题就归结为在平面 M 上作出等腰梯形 $ABCD$，使其两底 AB、CD 分别在直线 m、l 上，并且这个梯形存在内切圆。

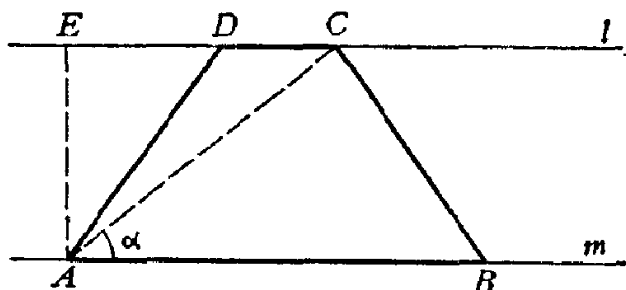


图 1-4

如图 1-4，作 $AE \perp l$，垂足为 E。要使梯形 $ABCD$ 存在内切圆，必须且只须

$$AD + BC = DC + AB,$$

即 $2AD = DC + AB$。

又∵ $DC + AB = 2EC$，

∴ $2AD = 2EC$，

$AD = EC$。

由此即可作出点 D，从而所求的等腰梯形不难作出。

作法：① 在平面 P 上，过点 A 作交线 p 的平行线 m；在平面 Q 上过点 C 作 p 的平行线 l；

② 过两平行线 m、l 作平面 M，在平面 M 上，作 $AE \perp l$，设垂足为 E；

③ 以A为圆心、EC长为半径作弧，与EC相交于点D；

④ 以C为圆心，CE长为半径作弧与m相交于点B；

⑤ 连结AD、BC，$ABCD$即为所求作的梯形。

证明：由于m、l分别在平面P、Q上，所以AB、CD分别在平面P、Q上。又$\because$ $m /\!/ p$，$l /\!/ p$，$\therefore$ $AB /\!/ CD$。又因$AD=EC$，$BC=EC$，$\therefore$ $AD=BC$，从而$ABCD$是等腰梯形。并且$AB+DC=2EC=AD+BC$，所以等腰梯形$ABCD$存在内切圆。

讨论：当AC与直线p（即与直线m）的交角$\alpha \leqslant 45^\circ$时，本题有一解（特别地，当$\alpha=45^\circ$时$ABCD$为正方形）；当$\alpha > 45^\circ$时，本题无解。

第 二 届

第二届国际数学奥林匹克于一九六〇年七月十八日至二十五日在罗马尼亚举行，参加的国家有：罗马尼亚，保加利亚，匈牙利，德意志民主共和国，捷克斯洛伐克。

竞 赛 题

题 1 求所有满足如下条件的三位数：它除以 11 所得的商等于它的各位数字的平方和。 （保加利亚）

题 2 解不等式：

$$\frac{4x^2}{(1-\sqrt{1+2x})^2}<2x+9.$$

（匈牙利）

题 3 已知直角三角形 ABC，将斜边 BC n 等分，n 是奇数，从顶点 A 向含有斜边中点的等分线段的两端引射线，所成的角为 α，斜边及斜边上的高分别为 a 与 h。证明：

$$\mathrm{tg}\alpha=\frac{4nh}{(n^2-1)a}.$$

（罗马尼亚）

题 4 已知 h_a，h_b 与 m_a，求作 ΔABC，使 BC、AC 边上的高分别为 h_a，h_b，BC 边上的中线为 m_a。

（匈牙利）

题5　已知一个正方体 $ABCD$-$A'B'C'D'$.

（Ⅰ）设X为线段 AC 上的任一点，Y为线段 $B'D'$ 上的任一点，求线段 XY 的中点的轨迹；

（Ⅱ）求在上述动线段 XY 上，且满足关系

$$ZY=2ZX$$

的动点Z的轨迹。　　　　　　　　　　　　（捷克斯洛伐克）

题6　已知一个正圆锥，它有一个内切球，这个球又有一个外切直圆柱，该圆柱的一个底面在圆锥的底面上，设圆锥的体积为 v_1，圆柱的体积为 v_2。

（Ⅰ）证明：等式 $v_1=v_2$ 不可能成立；

（Ⅱ）求出能使等式 $v_1=kv_2$ 成立的最小值 k．在这种情况下，作出这个圆锥轴截面的顶角。

（保加利亚）

题7　已知一个等腰梯形，它的两底和高分别为 a、b 和 h．

（Ⅰ）在梯形的对称轴上，求作一点P，使这点对梯形的腰所张的视角为直角；

（Ⅱ）求P点到梯形两底边的距离；

（Ⅲ）在什么条件下，点P能够作出？（即讨论点P在什么情况下存在。）

（德意志民主共和国）

题　　解

题1　设三位数的百位数字为 a，十位数字为 b，个位数字为 c，a、b、c 都是整数，且 $0<a\leqslant9$，$0\leqslant b$、$c\leqslant9$．这个三

位数等于 $100a+10b+c$。

按条件，三位数能被 11 整除，所以有且仅有如下两种可能：

① $a-b+c=0$；② $a-b+c=11$。

并且有

$$100a+10b+c=11(a^2+b^2+c^2). \tag{1}$$

① 若 $a-b+c=0$，即 $b=a+c$，那么

$$a^2+b^2+c^2-2b(a+c)+2ac=0,$$

$$\therefore \quad a^2+b^2+c^2=2b(a+c)-2ac=2(a+c)^2-2ac$$
$$=2(a^2+ac+c^2)$$

而

$$100a+10b+c=100a+10(a+c)+c$$
$$=110a+11c=11(10a+c).$$

代入(1)，得

$$10a+c=2(a^2+ac+c^2),$$

$$2a^2+2(c-5)a+2c^2-c=0,$$

$$a=\frac{5-c}{2}\pm\frac{1}{2}\cdot\sqrt{25-8c-3c^2},$$

因为 a 是正整数，所以必须 $25-8c-3c^2\geqslant 0$，即 $\frac{-\sqrt{91}-4}{3}\leqslant c\leqslant\frac{\sqrt{91}-4}{3}$. 由于 c 是非负整数，因此 c 只有两种可能：$c=0$ 或 $c=1$。

若 $c=0$，得 $a_1=5$ 或 $a_2=0$。$a_2=0$ 不合要求；由 $a=5$、$c=0$ 得 $b=a+c=5$，于是得到一个满足条件的三位数：550；

若 $c=1$，得 $a=2\pm\frac{1}{2}\sqrt{14}$是无理数，不合要求。

② 若 $a-b+c=11$，即 $b=a+c-11$，代入(1)得

$$100a+10(a+c-11)+c$$
$$=11[a^2+(a+c-11)^2+c^2],$$
$$11(10a+c-10)=11[2(a^2+c^2+ac-11a-11c)+121],$$
$$10a+c-10=2(a^2+c^2+ac-11a-11c)+121,$$
即 $$2a^2+2(c-16)a+2c^2+131-23c=0.$$

从而得 $$a=\frac{16-c}{2}\pm\frac{1}{2}\cdot\sqrt{-3c^2+14c-6}.$$

由于 a 是正整数，必须 $-3c^2+14c-6\geqslant0$，即 $\frac{7-\sqrt{31}}{3}\leqslant c\leqslant\frac{7+\sqrt{31}}{3}$，又因 c 是非负整数，所以 c 只可能是 1、2、3、4。

若 $c=1$，$a=\frac{15}{2}\pm\frac{1}{2}\cdot\sqrt{5}$ 是无理数，不合要求；

若 $c=2$，$a=7\pm\frac{1}{2}\cdot\sqrt{10}$ 是无理数，不合要求；

若 $c=3$，$a_1=8$ 或 $a_2=5$。其中 $a_2=5$ 不合要求，因为这时 $b=a+c-11=-3$ 不是非负整数。取 $a=8$，$c=3$，得 $b=0$，又得到一个满足条件的三位数：803；

若 $c=4$，$a=6\pm\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}$ 是无理数，不合要求。

综上所述，满足条件的三位数有两个：550，803。

题 2　先求不等式中未知数 x 的容许值范围：

$1+2x\geqslant0$，且 $1-\sqrt{1+2x}\neq0$，

即 $\qquad x \geqslant -\frac{1}{2}$，且 $x \neq 0$。 $\qquad$ (1)

原不等式就是

$$\frac{4x^2 \cdot (1+\sqrt{1+2x})^2}{(1-\sqrt{1+2x})^2 \cdot (1+\sqrt{1+2x})^2} < 2x+9,$$

$$\frac{4x^2 \cdot (2+2x+2\sqrt{1+2x})}{4x^2} < 2x+9,$$

$$2+2x+2\sqrt{1+2x} < 2x+9,$$

$$2\sqrt{1+2x} < 7,$$

$\therefore \qquad x < \frac{45}{8}$.

考虑到 x 的容许值范围(1)，得不等式的解为 $0 < x < \frac{45}{8}$ 或 $-\frac{1}{2} \leqslant x < 0$。

题 3 如图 2-1，设将斜边 n 等分的各分点依次为 D_1，D_2，……，D_{n-1}，由于 n 是奇数，显然，含有斜边中点的等分线段为 $D_{\frac{n-1}{2}}D_{\frac{n+1}{2}}$，所以

$$\alpha = \angle D_{\frac{n-1}{2}} A D_{\frac{n+1}{2}}$$

$$= \angle BAD_{\frac{n+1}{2}}$$

$$- \angle BAD_{\frac{n-1}{2}}.$$

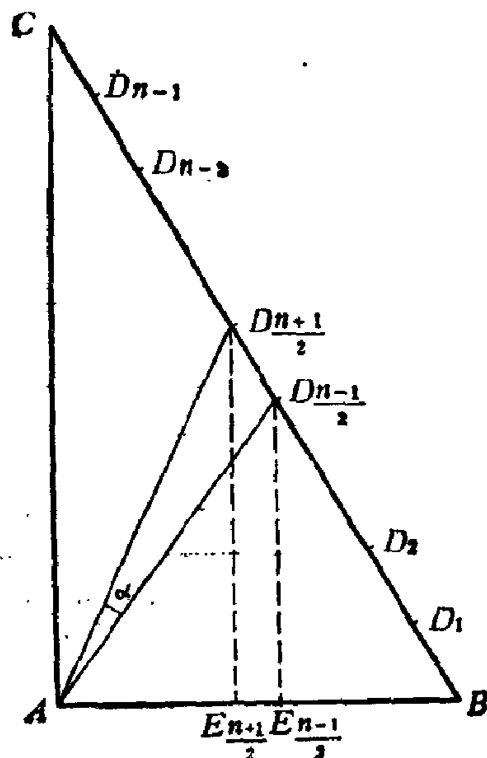


图 2-1

过$D_{\frac{n-1}{2}}$、$D_{\frac{n+1}{2}}$分别作

$$D_{\frac{n-1}{2}}E_{\frac{n-1}{2}}\perp AB,\ D_{\frac{n+1}{2}}E_{\frac{n+1}{2}}\perp AB,$$

垂足为$E_{\frac{n-1}{2}}$、$E_{\frac{n+1}{2}}$。设 $AB=c$,$AC=b$,则

$$D_{\frac{n-1}{2}}E_{\frac{n-1}{2}}=\frac{\frac{n-1}{2}}{n}b=\frac{n-1}{2n}b,$$

$$AE_{\frac{n-1}{2}}=\left(1-\frac{\frac{n-1}{2}}{n}\right)c=\frac{n+1}{2n}c,$$

所以 $$\operatorname{tg}\angle BAD_{\frac{n-1}{2}}=\frac{D_{\frac{n-1}{2}}E_{\frac{n-1}{2}}}{AE_{\frac{n-1}{2}}}=\frac{(n-1)b}{(n+1)c}.$$

同样，可得

$$\operatorname{tg}\angle BAD_{\frac{n+1}{2}}=\frac{(n+1)b}{(n-1)c}.$$

$$\therefore\ \operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}\left(\angle BAD_{\frac{n+1}{2}}-\angle BAD_{\frac{n-1}{2}}\right)$$

$$=\frac{\operatorname{tg}\angle BAD_{\frac{n+1}{2}}-\operatorname{tg}\angle BAD_{\frac{n-1}{2}}}{1+\operatorname{tg}\angle BAD_{\frac{n+1}{2}}\cdot\operatorname{tg}\angle BAD_{\frac{n-1}{2}}}$$

$$=\frac{\frac{(n+1)b}{(n-1)c}-\frac{(n-1)b}{(n+1)c}}{1+\frac{(n+1)b}{(n-1)c}\cdot\frac{(n-1)b}{(n+1)c}}$$

$$=\frac{4nbc}{(n^2-1)(b^2+c^2)}.$$

在直角三角形 ABC 中，有

$$b^2+c^2=a^2,\ bc=ah$$

代入得

$$\mathrm{tg}\alpha=\frac{4n\cdot ah}{(n^2-1)\cdot a^2},$$

即
$$\mathrm{tg}\alpha=\frac{4nh}{(n^2-1)a}.$$

题 4　分析：假定 $\triangle ABC$ 已作出（图 2-2），其中 $AD=h_a$，$BE=h_b$，$AM=m_a$。显然，直角三角形 ADM 可先作出，问题是要确定点 C（或 B）的位置。

作 $MF\perp AC$，垂足为 F，这时

$$\triangle CMF\backsim\triangle CBE,$$

$$\frac{MF}{BE}=\frac{MC}{BC}=\frac{1}{2},$$

$$\therefore\quad MF=\frac{1}{2}BE=\frac{1}{2}h_b,$$

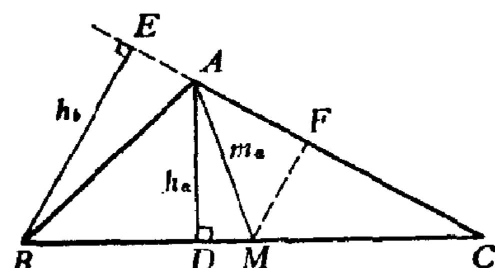


图 2-2

由此可作出点 F，从而问题不难解决。

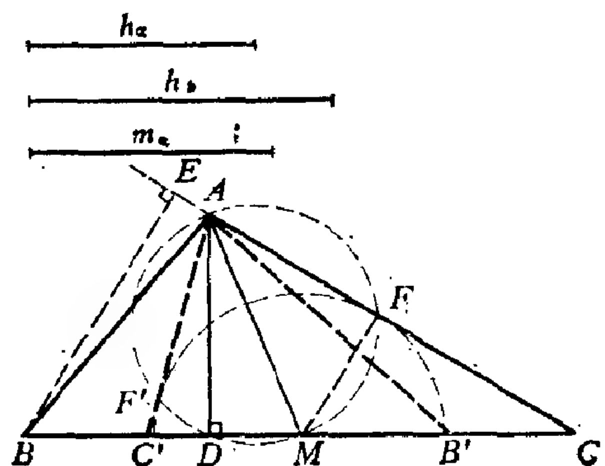


图 2-3

作法：（图 2-3）

① 作直角三角形 ADM，使 $AD=h_a$，$AM=m_a$，$\angle ADM=90°$；

② 以 AM 为直径作圆。再以 M 为圆心、$\frac{1}{2}h_b$ 为半径作圆。设两

圆相交于F点；

③ 连结AF，并延长与DM所在直线相交于C点；

④ 在DM所在直线上截取$MB=MC$（点B与点C在M点的两侧），连结AB，则$\triangle ABC$即为所求作的三角形。

证明：由作法①可知$\triangle ABC$中BC边上的高$AD=h_a$。由作法④可知点M是BC的中点，故BC边上的中线为AM，且$AM=m_a$。由作法②知，$MF\perp AC$，$MF=\frac{1}{2}h_a$，作$BE\perp AC$，垂足为E，则由$\triangle CEB\backsim\triangle CFM$可得$\frac{BE}{MF}=\frac{BC}{MC}=2$，

$\therefore$ $BE=2MF=h_b$，即AC边上的高$BE=h_b$。

讨论：当$m_a>h_a$，$h_b<2m_a$时，作法②中的两圆有两个交点F与F'，这时有两解，如图 2-3 中的$\triangle ABC$与$\triangle AB'C'$；

当$m_a>h_a$，$h_b=2m_a$时，作法②中两圆的交点F重合于A点，作$AC\perp AM$可得C点，这时只有一解(图 2-4)；

当$m_a>h_a$，$h_b>2m_a$时无解；

当$m_a=h_a$时，AD与AM重合．这时若$h_b<2m_a$，有一解，$\triangle ABC$是等腰三角形(图 2-5)．若$h_b\geq 2m_a$，无解；

当$m_a<h_a$时，无解。

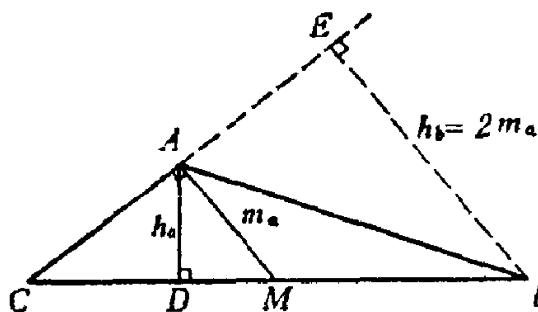


图 2-4

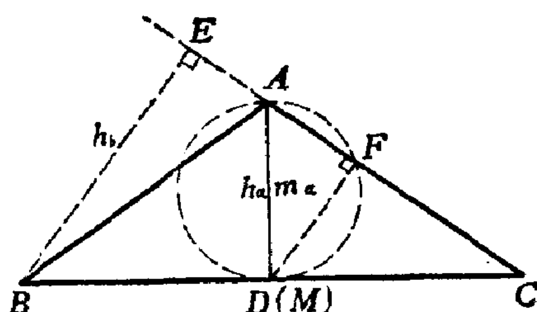


图 2-5

题 5 （I）当X为AC的端点A或C，Y为$B'D'$的端点B'或D'时，对应的线段XY分别是AD'，AB'，CB'，CD'，设它们的中点分别为E、F、G、H（图 2-6），它们是所求轨迹上的几个特殊点。

连结EF、FG、GH、HE。在$\triangle AB'D'$中，$EF \parallel D'B'$，$EF=\frac{1}{2}D'B'$；在$\triangle CB'D'$中，$HG \parallel D'B'$，$HG=\frac{1}{2}D'B'$。故

$$EF \parallel HG \parallel D'B', \quad EF=HG=\frac{1}{2}D'B'.$$

同理可得：

$$FG \parallel EH \parallel AC, \ FG=EH=\frac{1}{2}AC.$$

又因AC、$B'D'$所成的角为直角，所以四边形$EFGH$是一个正方形，它的边长为$\frac{\sqrt{2}}{2}a$（a表示正方体的棱长）。

当X是AC上的任一点，Y是$B'D'$上的任一点时，线段XY的中点Z的轨迹就是上述正方形$EFGH$的内部（包括边界）。下面我们来证明这个结论。

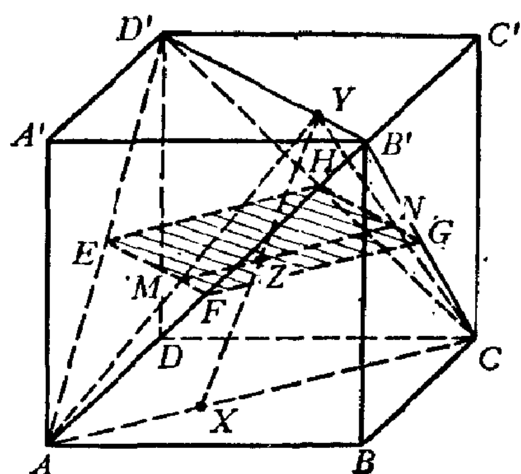


图 2-6

先证明任一这样的线段XY的中点Z在正方形$EFGH$的内部（包括边

界)。

设Y是$B'D'$上的任一点。在平面$AB'D'$上,连结YA,与EF相交于点M;在平面$CB'D'$上,连结YC,与HG相交于点N。在$\Delta AB'D'$中,因为$EF /\!/ D'B'$,E是AD'的中点,所以M是YA的中点;同理,N是YC的中点。因此,MN是ΔYAC的中位线,Y与AC上任一点X所连线段XY的中点Z必定在线段MN上。并且$MN /\!/ AC$,$MN /\!/ FG /\!/ EH$,故线段MN上各点都在正方形$EFGH$内部,从而Z点必定在正方形$EFGH$的内部(当X、Y中有一点是AC或$B'D'$的端点时,Z点在正方形$EFGH$的边界上)。

再证明正方形$EFGH$内部(包括边界)的任一点Z,必定是某一线段XY的中点(X在AC上,Y在$B'D'$上)。

设Z是正方形$EFGH$内的任一点,过Z点作$MN /\!/ FG$,与EF、GH分别相交于M、N点。在平面$AB'D'$上,连结AM,与$B'D'$相交于点Y,显然点M是YA的中点;连结YC,必定通过N点。于是MN在平面YAC上,从而Z点在平面YAC上;连结YZ并延长必与AC相交,设交点为X。由$MN /\!/ FG$可知$MN /\!/ AC$,并且M是YA的中点,所以Z点必定是线段XY的中点。

由此可见,所求Z点的轨迹为正方形$EFGH$的内部(包括边界),这个正方形的边长为$\frac{\sqrt{2}}{2}a$。

(Ⅱ)与(Ⅰ)相仿,可得:满足

$$ZY=2ZX$$

的动点Z的轨迹为矩形$E'F'G'H'$的内部(包括边界)(图2-7),其中E'、F'、G'、H'分别在AD'、AB'、CB、CD'上,

且

$$\frac{E'D'}{E'A}=\frac{F'B'}{F'A}=\frac{G'B'}{G'C}=\frac{H'D'}{H'C}=2,$$

这个矩形的边长分别为$\frac{\sqrt{2}}{3}a$与$\frac{2\sqrt{2}}{3}a$。

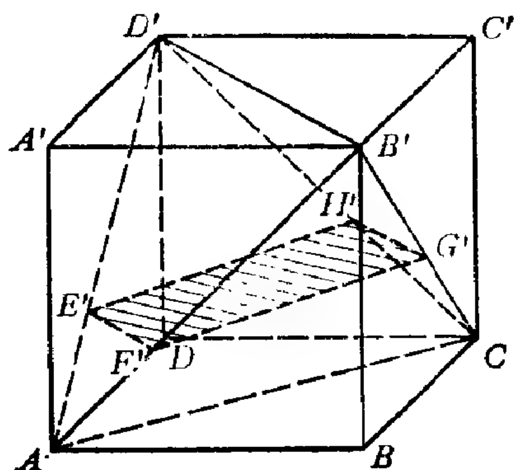


图 2-7

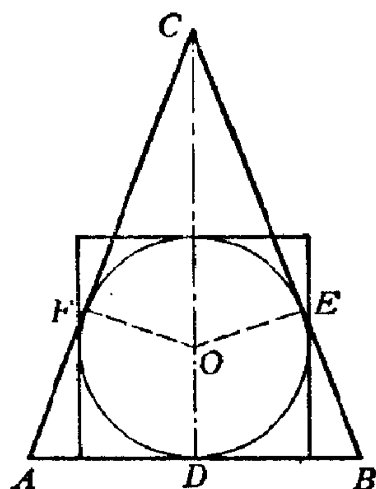


图 2-8

题 6　设圆锥的底面半径为 r_1，高为 h，内切球半径为 r_2。如图 2-8 所示，$AD=BD=r_1$，$OD=OE=OF=r_2$，$CD=h$。

$$v_1=\frac{1}{3}\pi r_1^2h, \tag{1}$$

$$v_2=2\pi r_2^3. \tag{2}$$

$\because$　$Rt.\triangle CDB\backsim Rt.\triangle CEO$,

$\therefore$　$\frac{BD}{OE}=\frac{CB}{CO}$,

即　$\frac{r_1}{r_2}=\frac{\sqrt{r_1^2+h^2}}{h-r_2}$,

$$r_1 \cdot (h - r_2) = r_2 \cdot \sqrt{r_1^2 + h^2},$$

$$r_1^2 \cdot (h - r_2)^2 = r_2^2 \cdot (r_1^2 + h^2),$$

$$r_1^2 \cdot (h^2 - 2hr_2 + r_2^2) = r_1^2 r_2^2 + r_2^2 h^2,$$

$$r_1^2 h^2 - 2hr_1^2 r_2 = r_2^2 h^2,$$

$\because$ $h \neq 0$, $\therefore$ $r_1^2 \cdot (h - 2r_2) = r_2^2 h$,

$\because$ $h > 2r_2$，即 $h - 2r_2 > 0$,

$$\therefore \quad r_1^2 = \frac{r_2^2 h}{h - 2r_2},$$

代入(1)式得

$$v_1 = \frac{\pi r_2^2 h^2}{3(h - 2r_2)}. \tag{3}$$

(Ⅰ) 用反证法。假定可能有 $v_1 = v_2$，即

$$\frac{v_1}{v_2} = 1.$$

将(2)、(3)代入上式，得

$$\frac{h^2}{6r_2(h - 2r_2)} = 1,$$

即

$$h^2 - 6r_2 h + 12r_2^2 = 0. \tag{4}$$

但是，对于任意正实数 h 、r_2，恒有

$$h^2 - 6r_2 h + 12r_2^2 = (h - 3r_2)^2 + 3r_2^2 > 0.$$

所以(4)式不可能成立，即不可能有 $v_1 = v_2$。

(Ⅱ) 设 $v_1 = kv_2$，即

$$\frac{v_1}{v_2} = k. \tag{5}$$

将(2)、(3)代入得(5)式

$$\frac{h^2}{6r_2(h - 2r_2)} = k,$$

即 $$h^2-6kr_2h+12kr_2^2=0,$$

$$\left(\frac{h}{r_2}\right)^2-6k\cdot\left(\frac{h}{r_2}\right)+12k=0. \qquad (6)$$

把(6)看成关于$\frac{h}{r_2}$的方程，它有实数根的充要条件是判别式

$$\Delta=4\cdot(9k^2-12k)\geqslant 0,$$

即 $$k\cdot(3k-4)\geqslant 0.$$

由于 $k=\frac{v_1}{v_2}>0$，故得

$$3k-4\geqslant 0,$$

$$k\geqslant\frac{4}{3}.$$

这就是说，能使 $v_1=kv_2$ 成立的最小值 $k=\frac{4}{3}$.

在这种情况下，即当 $k=\frac{4}{3}$时，(6)式为

$$\left(\frac{h}{r_2}\right)^2-8\left(\frac{h}{r_2}\right)+16=0,$$

解之得 $\frac{h}{r_2}=4,$

即 $h=4r_2$.

由此我们可按如下步骤作出这个圆锥轴截面的顶角（图2-9）.

① 任取一线段 r_2，作 $CD=4r_2$，并在 CD 上截取$OD=r_2$；

② 以O为圆心，r_2为半径作圆；

③ 过C点作$\odot O$的切线CE、CF，则$\angle ECF$就是当$k=\frac{4}{3}$时圆锥轴截面的顶角。

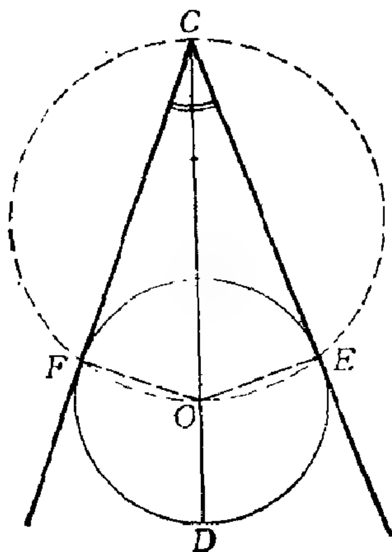


图 2-9

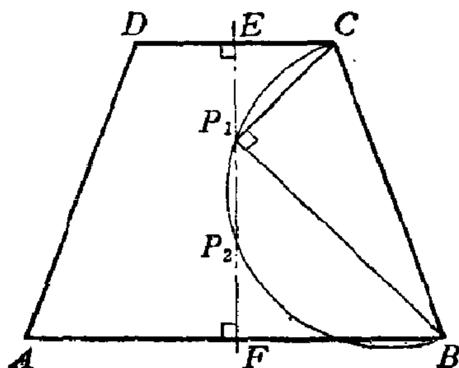


图 2-10

题7 （Ⅰ）要使$\angle BPC=90°$（图2-10），必须且只须P点在以BC为直径的圆周上。作以BC为直径的圆，它与等腰梯形对称轴EF的交点P即为所求。

（Ⅱ）设点P到上底的距离$PE=x_1$，到下底的距离$PF=x_2$。

$\because$ $\angle PCE=\angle BPF$（都与$\angle EPC$互余），

$\therefore$ $Rt.\triangle PCE\backsim Rt.\triangle BPF$，

得
$$\frac{PE}{BF}=\frac{CE}{PF},$$

即
$$\frac{x_1}{\frac{a}{2}}=\frac{\frac{b}{2}}{x_2},$$

$$x_1x_2=\frac{1}{4}ab。\qquad(1)$$

又∵ $\qquad x_1+x_2=h,\qquad(2)$

因此，x_1、x_2 是方程

$$x^2-hx+\frac{1}{4}ab=0$$

的两根，解之得

$$x_{1、2}=\frac{h}{2}\pm\frac{1}{2}\cdot\sqrt{h^2-ab}.$$

当 $h^2>ab$、即 $h^2-ab>0$ 时，符合条件的点有两个：P_1、P_2，它们到上下底的距离分别为：

$$P_1E=\frac{h}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{h^2-ab},\quad P_1F=\frac{h}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{h^2-ab};$$

$$P_2E=\frac{h}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{h^2-ab},\quad P_2F=\frac{h}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{h^2-ab}.$$

当 $h^2=ab$、即 $h^2-ab=0$ 时，符合条件的点 P 有且仅有一个，它到上下底的距离都等于 $\frac{h}{2}\left(PE=PF=\frac{h}{2}\right)$，即点 P 是 EF 的中点。

(Ⅱ) 由(Ⅰ)可见，当 $h^2\geqslant ab$ 时，P 点可以作出。而当 $h^2<ab$ 时，$h^2-ab<0$，$x_{1、2}=\frac{h}{2}\pm\sqrt{h^2-ab}$ 不是实数，符合条件的点 P 不存在。



第　三　届

第三届国际数学奥林匹克于一九六一年七月八日至十四日在匈牙利举行，参加的国家有：匈牙利，波兰，罗马尼亚，捷克斯洛伐克，德意志民主共和国，保加利亚。

竞　赛　题

题1　解方程组

$$\begin{cases} x+y+z=a \\ x^2+y^2+z^2=b^2 \\ xy=z^2 \end{cases}$$

其中 a、b 为已知数。

试问，a、b 应满足怎样的条件，才能使方程组的解 x、y、z 为互不相等的正数？　　（匈牙利，6分）

题2　已知三角形的三边的长分别为 a、b、c，面积为 S，证明：

$$a^2+b^2+c^2 \geqslant 4\sqrt{3}\,S.$$

并求出在什么条件下等号成立？

（波兰，7分）

题3　解方程　$\cos^n x - \sin^n x = 1$

其中 n 为任意给定的自然数。

（保加利亚，7分）

题 4　已知 $\Delta P_1P_2P_3$ 及三角形内任一点 P，直线 P_1P、P_2P、P_3P 分别交对边于 Q_1、Q_2、Q_3. 证明：在 $\frac{P_1P}{PQ_1}$、$\frac{P_2P}{PQ_2}$、$\frac{P_3P}{PQ_3}$ 这三个比值中，至少有一个不大于 2，并且至少有一个不小于 2.

（德意志民主共和国，6 分）

题 5　求作 ΔABC，使 $AC=b$，$AB=c$，$\angle AMB=w$，这里 M 是 BC 的中点，且 $w<90°$. 并证明：当且仅当



$$b\operatorname{tg}\frac{w}{2}\leqslant c<b$$

时，本题有解. 又在什么情况下等号成立？

（捷克斯洛伐克，7 分）

题 6　已知平面 E 的同一侧有不在一直线上的三点 A、B、C，并且过 A、B、C 三点的平面与平面 E 不平行. 在平面 E、上任取三点 A'、B'、C'；又 L、M、N 分别是线段 AA'、BB' CC' 的中点，G 是 ΔLMN 的重心（如果对应于 A'、B'、C' 的三线段的中点 L、M、N 不构成三角形，这种情况可不予考虑）. 求当 A'、B'、C' 在平面 E 上任意变动时 G 点的轨迹

（罗马尼亚，7 分）

题　　解

题 1

$$\begin{cases} x+y+z=a & (1)\\ x^2+y^2+z^2=b^2 & (2)\\ xy=z^2 & (3)\end{cases}$$

由(3)得　$(x+y)^2=x^2+y^2+2z^2$

$$= (x^2+y^2+z^2)+z^2 \tag{4}$$

由(1)得 $x+y=a-z$, (5)

将(5)、(2)代入(4)，得

$$(a-z)^2=b^2+z^2,$$

即 $2az=a^2-b^2$。 (6)

当 $a=0$，$b\neq 0$ 时，方程(6)无解，故原方程组无解；

当 $a=0$、$b=0$ 时，由方程(2)得 $x=y=z=0$，显然它满足(1)，(3)，因此原方程组有唯一解 $x=y=z=0$；

当 $a\neq 0$ 时，得

$$z=\frac{a^2-b^2}{2a}, \tag{7}$$

由(1)得 $y=a-x-z=(a-z)-x$, (8)

将(7)、(8)代入(3)，得

$$x\cdot\left[\left(a-\frac{a^2-b^2}{2a}\right)-x\right]=\left(\frac{a^2-b^2}{2a}\right)^2,$$

或

$$x\cdot\left(\frac{a^2+b^2}{2a}-x\right)=\left(\frac{a^2-b^2}{2a}\right)^2,$$

两边同乘以 $4a^2$ 并整理得

$$4a^2x^2-2a(a^2+b^2)x+(a^2-b^2)^2=0. \tag{9}$$

其判别式 $\Delta=4a^2\cdot[(a^2+b^2)^2-4(a^2-b^2)^2]$

$$=4a^2(10a^2b^2-3a^4-3b^4),$$

当 $\Delta\geqslant 0$，即 $10a^2b^2-3a^4-3b^4\geqslant 0$ 时，方程(9)的解为

$$x_{1,2}=\frac{a^2+b^2\pm\sqrt{10a^2b^2-3a^4-3b^4}}{4a}, \tag{10}$$

代入(8)，得

$$y_{1,2}=\frac{a^2+b^2\mp\sqrt{10a^2b^2-3a^4-3b^4}}{4a}. \qquad (11)$$

当 $\Delta<0$，即 $10a^2b^2-3a^4-3b^4<0$ 时，方程(9)没有实数解，故原方程组无解。

综上所述，有

当 $a=0$、$b=0$ 时，方程组有唯一解 $x=y=z=0$；

当 $a\neq0$，且 $10a^2b^2-3a^4-3b^4\geqslant0$ 时，方程组有两个实数解：

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{a^2+b^2+\sqrt{10a^2b^2-3a^4-3b^4}}{4a} \\ y_1=\dfrac{a^2+b^2-\sqrt{10a^2b^2-3a^4-3b^4}}{4a} \\ z_1=\dfrac{a^2-b^2}{2a} \end{cases};$$

$$\begin{cases} x_2=\dfrac{a^2+b^2-\sqrt{10a^2b^2-3a^4-3b^4}}{4a} \\ y_2=\dfrac{a^2+b^2+\sqrt{10a^2b^2-3a^4-3b^4}}{4a} \\ z_2=\dfrac{a^2-b^2}{2a} \end{cases}.$$

（当 $10a^2b^2-3a^4-3b^4=0$ 时，两个解相同，且 $x=y$）

当 $10a^2b^2-3a^4-3b^4<0$ 时（上面讨论中的 $a=0$、$b\neq0$ 这种情况已包括在内），方程组没有实数解。

再讨论 x、y、z 为互不相等的正数的条件。显然，必须 $a>0$，并且 $10a^2b^2-3a^4-3b^4>0$，即 $-(3a^2-b^2)(a^2-3b^2)>0$，得

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot|b|<a<\sqrt{3}\,|b|, \tag{12}$$

又因 $x>0$、$y>0$，由(10)、(11)可知，必须

$$a^2+b^2>\sqrt{10a^2b^2-3a^4-3b^4},$$

$$(a^2+b^2)^2>10a^2b^2-3a^4-3b^4,$$

$$4a^4-8a^2b^2+4b^4>0,$$

即

$$4(a^2-b^2)^2>0, \tag{13}$$

又因 $z>0$，由(7)可知，必须

$$a^2>b^2,$$

即

$$a>|b|, \tag{14}$$

这时，由(14)便可保证(13)成立。

由(12)、(14)得，方程组有互不相等的正数解的条件是：

$$|b|<a<\sqrt{3}\,|b|.$$

题2 由海伦(Heron)公式，三角形面积为

$$S=\sqrt{\frac{a+b+c}{2}\cdot\frac{a+b-c}{2}\cdot\frac{a+c-b}{2}\cdot\frac{b+c-a}{2}}.$$

又因对于任意正实数 x、y、z，有不等式：

$$\frac{x+y+z}{3}\geqslant\sqrt[3]{xyz},$$

即

$$xyz\leqslant\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3$$

（等号当且仅当 $x=y=z$ 时成立）。

故有

$$(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)$$

$$\leqslant\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3=\frac{(a+b+c)^3}{27}$$

（等号当且仅当 $a+b-c=a+c-b=b+c-a$、即 $a=b=c$ 时成立）.

$$\therefore\quad 4S=\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}$$

$$\leqslant\sqrt{(a+b+c)\cdot\frac{(a+b+c)^3}{27}}=\frac{(a+b+c)^2}{3\sqrt{3}}$$

$$=\frac{3a^2+3b^2+3c^2-(a-b)^2-(b-c)^2-(c-a)^2}{3\sqrt{3}}$$

$$\leqslant\frac{a^2+b^2+c^2}{\sqrt{3}},$$

即得 $\qquad a^2+b^2+c^2\geqslant 4\sqrt{3}S$.

等号当且仅当 $a=b=c$ 时成立.

题 3 当 n 是偶数时，$\sin^n x\geqslant 0$，$\cos^n x\leqslant 1$，所以 $\cos^n x-\sin^n x\leqslant 1$. 要使 $\cos^n x-\sin^n x=1$ 成立，必须且只须

$$\cos^n x=1 \quad 且 \quad \sin^n x=0,$$

即 $\qquad \cos x=\pm 1 \quad 且 \quad \sin x=0,$

由此得方程的解为

$$x=k\pi \qquad (k 为整数).$$

当 n 是奇数时，将原方程写为

$$\cos^n x=1+\sin^n x,$$

由于 $\sin x\geqslant -1$，所以 $\sin^n x\geqslant -1$，必有 $\cos^n x\geqslant 0$，$\cos x\geqslant 0$；又因 $\cos x\leqslant 1$，所以 $\cos^n x\leqslant 1$，必有 $\sin^n x\leqslant 0$，$\sin x\leqslant 0$.

若 $\sin x=0$，代入方程得 $\cos^n x=1$，有 $\cos x=1$，由此得方程的一组解：

$$x=2k\pi \qquad (k 为整数).$$

若 $\sin^n x=-1$，代入方程得 $\cos^n x=0$，有 $\cos x=0$，由此

得方程的又一组解：

$$x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \quad (k\text{ 为整数})。$$

最后，若 $-1<\sin x<0$，这时 $0<\cos^n x<1$，有 $0<\cos x<1$。于是原方程可以写为

$$|\cos x|^n + |\sin x|^n = 1。$$

当 $n\geqslant3$ 时，$|\cos x|^n<\cos^2 x, |\sin x|^n<\sin^2 x$，

$$|\cos x|^n + |\sin x|^n < \cos^2 x + \sin^2 x = 1,$$

所以当 $n\geqslant3$ 时原方程没有适合 $-1<\sin x<0$ 的解。

当 $n=1$ 时，原方程就是

$$\cos x - \sin x = 1,$$

即

$$\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=1,$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\frac{\pi}{4}+x=2k\pi\pm\frac{\pi}{4},$$

$$\therefore \quad x=2k\pi \quad \text{或} \quad x=2k\pi-\frac{\pi}{2}(k\text{ 为整数}),$$

对于这两组解，分别有 $\cos x=1$，$\sin x=0$ 或 $\cos x=0$，$\sin x=-1$，但不适合 $-1<\sin x<0$。

综上所述，得原方程的解为：

$$x=\begin{cases} k\pi & (\text{当 } n \text{ 为偶数时}) \\ 2k\pi \text{ 或 } 2k\pi-\frac{\pi}{2} & (\text{当 } n \text{ 为奇数时}) \end{cases}$$

$$(k\text{ 为整数})。$$

题 4 证法一 如图 3-1 所示，设 $\Delta P_1P_2P_3$、ΔPP_2P_3、ΔPP_3P_1、ΔPP_1F 的面积分别为 S、S_1、S_2、S_3，则有

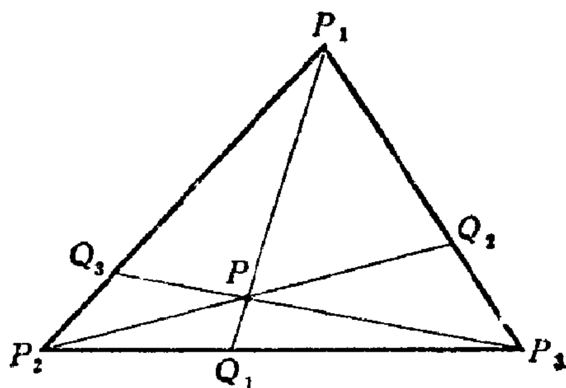


图 3-1

$$\frac{S_1}{S}=\frac{PQ_1}{P_1Q_1}$$

$$=\frac{PQ_1}{P_1P+PQ_1}$$

$$=\frac{1}{\frac{P_1P}{PQ_1}+1},$$

同理，有

$$\frac{S_2}{S}=\frac{1}{\frac{P_2P}{PQ_2}+1},\quad \frac{S_3}{S}=\frac{1}{\frac{P_3P}{PQ_3}+1}.$$

$$\because \quad S_1+S_2+S_3=S,$$

$$\therefore \quad \frac{S_1}{S}+\frac{S_2}{S}+\frac{S_3}{S}=1,$$

即
$$\frac{1}{\frac{P_1P}{PQ_1}+1}+\frac{1}{\frac{P_2P}{PQ_2}+1}+\frac{1}{\frac{P_3P}{PQ_3}+1}=1.$$

所以上式左边三个分式中至少有一个不大于$\frac{1}{3}$，也至少有一个不小于$\frac{1}{3}$，不妨设

$$\frac{1}{\frac{P_1P}{PQ_1}+1}\leqslant\frac{1}{3},\quad \frac{1}{\frac{P_2P}{PQ_2}+1}\geqslant\frac{1}{3},$$

于是可得：

$$\frac{P_1P}{PQ_1}+1\geqslant 3,\quad \frac{P_2P}{PQ_2}+1\leqslant 3,$$

即 $$\frac{P_1P}{PQ_1}\geqslant 2,\quad \frac{P_2P}{PQ_2}\leqslant 2.$$

命题得证。

证法二 如图 3-2 所示，设点 S 是 $\Delta P_1P_2P_3$ 的重心，P_1M_1、P_2M_2、P_3M_3 是 $\Delta P_1P_2P_3$ 的三条中线，则有

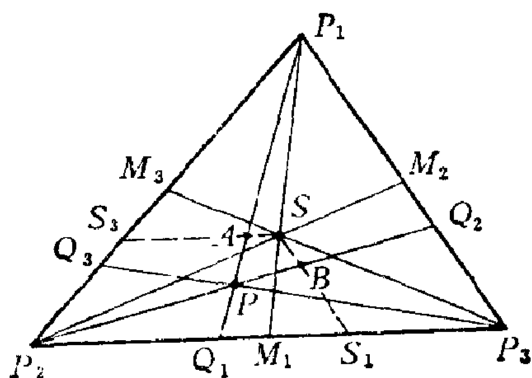


图 3-2

$$\frac{P_1S}{SM_1}=\frac{P_2S}{SM_3}=\frac{P_3S}{SM_3}=2.$$

若点 P 与点 S 重合，即 Q_1、Q_2、Q_3 三点分别与点 M_1、M_2、M_3 重合，故有

$$\frac{P_1P}{PQ_1}=\frac{P_2P}{PQ_2}=\frac{P_3P}{PQ_3}=2,$$

命题成立；

若点 P 与点 S 不重合，则点 P 必属于下列六个三角形：ΔSP_1M_3，ΔSP_2M_3，ΔSP_2M_1，ΔSP_3M_1，ΔSP_3M_2，ΔSP_1M_2 中的某一个（可以在边上，但不与顶点重合）。

不失一般性，我们设点P在ΔSP_2M_1内．过S作$SS_3 \parallel P_3P_2$，与P_1P_2相交于S_3点，它与P_1Q_1亦必相交，设交点为A．因为ΔSP_2M_1在四边形$SS_3P_2M_1$内，所以A点在P_1、P两点之间，从而有

$$\frac{P_1P}{PQ_1} > \frac{P_1A}{AQ_1} = \frac{P_1S}{SM_1} = 2.$$

再过S作$SS_1 \parallel P_1P_3$，与P_2P_3相交于S_1点，它与P_2Q_2亦必相交，设交点为B．因为ΔSP_2M_1在ΔSP_2S_1内，所以B点在P、Q_2两点之间，从而有

$$\frac{P_2P}{PQ_2} < \frac{P_2B}{BQ_2} = \frac{P_2S}{SM_2} = 2.$$

这就得到

$$\frac{P_1P}{PQ_1} > 2, \qquad \frac{P_2P}{PQ_2} < 2.$$

命题成立．

如果点P在其他某一个ΔSP_iM_j(i、$j = 1, 2, 3$，$i \neq j$)内，同样可证．

总之，对于$\Delta P_1P_2P_3$内的任一点P，命题成立．

题5 分析：假定ΔABC已作出，满足题给条件(图3-3)．

$\because \quad \angle AMB = w < 90°$，

$\therefore \quad \angle AMC = 180° - w > 90°$．

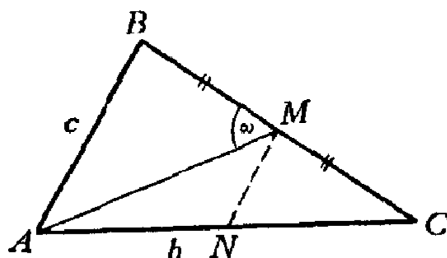


图 3-3

取AC的中点N，连结NM，因为M是BC的中点，所

以 $NM /\!/ AB$，$NM=\frac{1}{2}AB=\frac{c}{2}$。

于是在 $\triangle AMC$ 中，$AC=b$，AC 上的中线 $NM=\frac{c}{2}$，且 $\angle AMC=180°-w$，所以 $\triangle AMC$ 可先作出。

作法：（图 3-4）

① 作 $AC=b$，在线段 AC 上作圆周角等于 $180°-w$ 的弓形弧 $\overset{\frown}{AkC}$；

② 取 AC 的中点 N。以 N 为圆心、$\frac{c}{2}$ 为半径作弧，与弓形弧 $\overset{\frown}{AkC}$ 相交于点 M；

图 3-4

③ 连结 CM，并在 CM 的延长线上截取 $MB=CM$；

④ 连结 AB，则 ΔABC 即为所求作的三角形.

证明：由作法①，$AC=b$，$\angle AMC=180°-w$，$\therefore \angle AMB=180°-\angle AMC=w$，并且 $MB=CM$（作法③）．又由作法知N是 AC 的中点，所以 $AB=2NM=2\cdot\frac{c}{2}=c$.

讨论：我们来证明，当且仅当$b\operatorname{tg}\frac{w}{2}\leqslant c<b$ 时，本题有解.

若本题有解，即 ΔABC 能作出，BC 的中点M必定在弓形弧$\overset{\frown}{AkC}$上，并且 $NM=\frac{c}{2}$.设弓形弧$\overset{\frown}{AkC}$的圆心为O，半径为R，对称轴为OH(H在$\overset{\frown}{AkC}$上)，如图 3-5 所示。要使M点存在，必须

$$OM\leqslant ON+NM. \tag{1}$$

而
$$OM=R,\ NM=\frac{c}{2},$$

$$ON=OH-NH=R-NH=R-NC\cdot\operatorname{tg}\angle ACH$$

$$=R-\frac{b}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{w}{2},$$

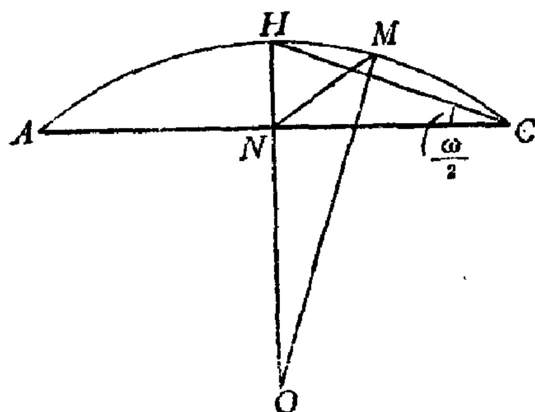


图 3-5

代入(1)，得

$$R\leqslant R-\frac{b}{2}\operatorname{tg}\frac{w}{2}+\frac{c}{2},$$

$$\frac{b}{2}\operatorname{tg}\frac{w}{2}\leqslant\frac{c}{2},$$

$$\therefore \quad b\,\mathrm{tg}\frac{w}{2} \leqslant c. \qquad (2)$$

又因在 $\triangle ACM$ 与 $\triangle ABM$ 中(图 3-4),

$AM = AM$, $CM = BM$.

$\angle AMB = w < 90°$, $\angle AMC = 180° - w > 90°$,

可得 $\angle AMB < \angle AMC$,

$\therefore \quad AB < AC$,

即 $c < b$ (3)

由(2)、(3),即得本题有解的必要条件是

$$b\,\mathrm{tg}\frac{w}{2} \leqslant c < b.$$

再证条件也是充分的,即当 $b\,\mathrm{tg}\frac{w}{2} \leqslant c < b$ 时,符合要求的 $\triangle ABC$ 能作出.

事实上,由 $c < b$ 可得

$$NA = \frac{b}{2} > \frac{c}{2},$$

即点 A 在以 N 为圆心、$\frac{c}{2}$ 为半径的圆 $\odot N$ 外.

又由 $b\,\mathrm{tg}\frac{w}{2} \leqslant c$ 可知,

$$NH = \frac{b}{2} \cdot \mathrm{tg}\frac{w}{2} \leqslant \frac{c}{2},$$

即 H 点不在 $\odot N$ 外.

当 $b\,\mathrm{tg}\frac{w}{2} < c$ 时,$NH < \frac{c}{2}$,即 H 点在 $\odot N$ 内.这时 $\overset{\frown}{AkC}$ 上有一点 A 在 $\odot N$ 外,又有一点 H 在 $\odot N$ 内,所以 $\overset{\frown}{AkC}$ 与

$\odot N$必定相交，即M点可以作出，进而ΔABC可作出。并且$\overset{\frown}{AkC}$与$\odot N$有两个交点，所以这时本题有两解（在图 3-4中，这两个交点为M、M'，由M'点可按作法③、④作出另一个符合要求的三角形）。

当$b\text{tg}\frac{w}{2}=c$时，$NH=\frac{c}{2}$，$\overset{\frown}{AkC}$与$\odot N$只有一个交点H，即M点与H点重合，这时$AB /\!/ NM \perp AC$，故$\angle BAC=90°$。即所作的ΔABC是一个直角三角形(图 3-6)。

综上所述，有：

当且仅当$b\text{tg}\frac{w}{2}<c<b$时，本题有两解；

当且仅当$b\text{tg}\frac{w}{2}=c<b$时；本题有且仅有一解，$\Delta ABC$是直角三角形($\angle A=90°$)。

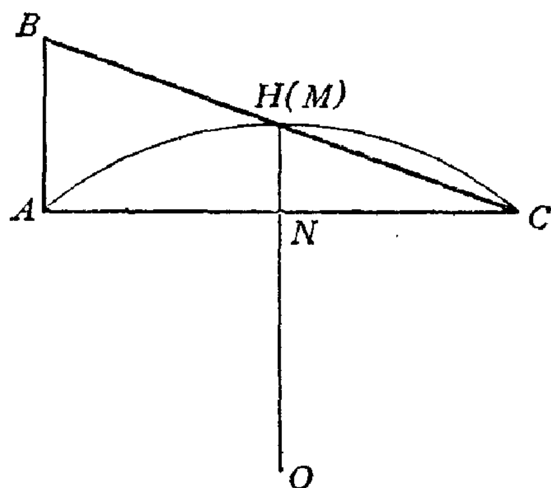


图 3-6

题 6 以平面E作为坐标平面$z=0$(即任取平面E上一定点作为原点，Ox、Oy轴在平面E上，Oz轴与平面E垂直)，建立直角坐标系$O—xyz$(图 3-7)。设三已知点A、B、C的坐标分别为：

$A(x_1,y_1,2a)$，$B(x_2,y_2,2b)$，$C(x_3,y_3,2c)$。则ΔABC的重心S的坐标为

$$S\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\frac{y_1+y_2+y_3}{3},\frac{2(a+b+c)}{3}\right).$$

设平面E上动点A'、B'、C'的坐标分别为：

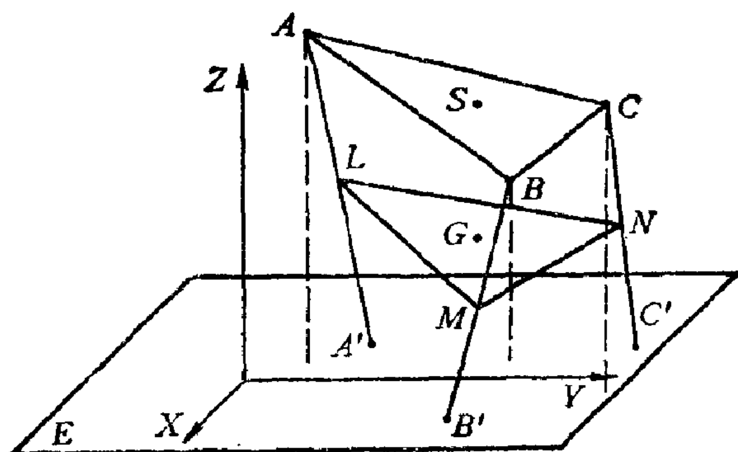


图 3-7

$$A'(x'_1, y'_1, 0),\quad B'(x'_2, y'_2, 0),\quad C'(x'_3, y'_3, 0),$$

于是，AA'、BB'、CC' 的中点 L、M、N 的坐标分别为：

$$L\left(\frac{x_1+x'_1}{2}, \frac{y_1+y'_1}{2}, a\right),$$

$$M\left(\frac{x_2+x'_2}{2}, \frac{y_2+y'_2}{2}, b\right),$$

$$N\left(\frac{x_3+x'_3}{2}, \frac{y_3+y'_3}{2}, c\right),$$

ΔLMN 的重心 G 的坐标为：

$$G\left(\frac{x_1+x_2+x_3+x'_1+x'_2+x'_3}{6}, \frac{y_1+y_2+y_3+y'_1+y'_2+y'_3}{6}, \frac{a+b+c}{3}\right).$$

由此可见，不论 A'、B'、C' 在平面上的位置如何，即不论 x'_i、y'_i $(i=1,2,3)$ 的取值如何，G 点的 z 坐标总为定值：

$$z_G = \frac{a+b+c}{3},$$

即G点在与平面E平行的一个平面

$$z=\frac{a+b+c}{3}$$

上。

另一方面，G点的x、y坐标为

$$x_G=\frac{x_1+x_2+x_3+x_1'+x_2'+x_3'}{6},$$

$$y_G=\frac{y_1+y_2+y_3+y_1'+y_2'+y_3'}{6}$$

由于A'、B'、C'在平面E上任意变动，所以x_i'、y_i' $(i=1,2,3)$可取一切实数值，从而x_G、y_G可取一切实数值。这就是说，动点G可以取遍平面$z=\dfrac{a+b+c}{3}$上的任一点。

所以动点G的轨迹为平面

$$z=\frac{a+b\div c}{3},$$

这个平面平行于平面E，它到平面E的距离$\left(\dfrac{a+b+c}{3}\right)$等于$\triangle ABC$ 的重心S到平面E的距离$\dfrac{2(a+b+c)}{3}$的一半。

第　四　届

第四届国际数学奥林匹克于一九六二年七月三日至十六日在捷克斯洛伐克举行，参加的国家有：保加利亚、匈牙利，德意志民主共和国，波兰，罗马尼亚，苏联，捷克斯洛伐克。

竞　赛　题

题 1　求具有下列两个性质的最小自然数 n：（Ⅰ）n 的个位数是 6；（Ⅱ）如果将 n 的个位数字 6 移到其余各位数字之前，所得的新数是 n 的 4 倍.

（波兰，6 分）

题 2　求满足不等式

$$\sqrt{3-x}-\sqrt{x+1}>\frac{1}{2}$$

的所有实数 x.　（匈牙利，6 分）

题 3　已知一个正方体 $ABCD$-$A'B'C'D'$，点 X 沿正方形 $ABCD$ 按 $ABCDA$ 的方向作等速运动，点 Y 沿正方形 $B'C'CB$ 按 $B'C'CBB'$ 的方向以同样的速度作等速运动，点 X 与 Y 分别从 A 点与 B' 点同时出发，求线段 XY 的中点的轨迹，并画出其图形.

（捷克斯洛伐克，8 分）

题 4　解方程 $\cos^2x+\cos^2 2x+\cos^2 3x=1$.

（罗马尼亚， 5 分）

题 5　设 A、B、C 为圆周 k 上的三个已知点，在圆周 k 上求作第四点 D，使四边形 $ABCD$ 存在内切圆。

（保加利亚， 7 分）

题 6　已知 $\triangle ABC$ 为等腰三角形，外接圆半径为 r，内切圆半径为 ρ，证明两圆的圆心距为

$$d=\sqrt{r(r-2\rho)}.$$

（德意志民主共和国， 6 分）

题 7　已知一个四面体 $SABC$，存在五个球，与四面体的棱 SA、SB、SC、AB、BC、CA 或其延长线相切。证明：

（Ⅰ）四面体 $SABC$ 是正四面体；

（Ⅱ）反之，每个正四面体必定存在五个这样的球。

（苏联， 8 分）

题　　解

题 1　解法一　因为 n 的个位数是 6，设

$$n=a_k\cdot 10^k+a_{k-1}\cdot 10^{k-1}+\cdots+a_2\cdot 10^2+a_1\cdot 10+6,$$

其中 k 为非负整数，$0\leqslant a_i\leqslant 9\ (i=1,2,\cdots,k)$，且 $a_k\neq 0$。

记　$X=a_k\cdot 10^{k-1}+a_{k-1}\cdot 10^{k-2}+\cdots+a_2\cdot 10+a_1$，

则有　$n=10X+6$，将 n 的个位数字 6 移至其余各位数字之前所得的新数为 $6\cdot 10^k+X$，由条件(2)得

$$6\cdot 10^k+X=4(10X+6),$$

$$6\cdot 10^k+X=40X+24,$$

$$39X=6(10^k-4),$$

$$13X=2(10^k-4).$$

由于X为自然数，且$(13,2)=1$，所以必有$13|10^k-4$，而满足$13|10^k-4$的最小非负整数$k=5$，这时

$$10^k-4=10^5-4=99996=13\times7692,$$

所以
$$X=\frac{2(10^k-4)}{13}=2\times7692=15384,$$

$$n=10X+6=153846.$$

不难检验，$n=153846$满足题设要求，事实上，有$615384=4\times153846$。

因此，所求的最小自然数为153846。

解法二　设　$n=\overline{a_ka_{k-1}\cdots a_26}$ 满足条件(1)、(2)，则

$$m=4n=\overline{6a_ka_{k-1}\cdots a_2}.$$

因为n的最末一位数字是6，所以$m=4n$的末位数字是4，即$a_2=4$。将$a_2=4$代入n并乘以4，可求得$a_3=8$。再将$a_2=4$、$a_3=8$代入n并乘以4，可求得$a_4=3$。如此继续下去，直至$m=4n$第一次出现某一位上的数字为6为止，求得$a_5=5$，$a_6=1$，得

$$n=153846,$$

即为满足条件(1)、(2)的最小的自然数。

题2　先求原不等式中未知数x的容许值集。由$3-x\geqslant0$及$x+1\geqslant0$得

$$-1\leqslant x\leqslant3. \tag{1}$$

原不等式变形得

$$2\sqrt{3-x}>2\sqrt{x+1}+1,$$

两边平方得

$$4(3-x)>4(x+1)+1+4\sqrt{x+1},$$

（因为 $2\sqrt{3-x}\geqslant 0$，$2\sqrt{x+1}+1>0$，所以得到的新不等式与原不等式等价）

即 $$7-8x>4\sqrt{x+1}. \tag{2}$$

在这里，$\because\ 4\sqrt{x+1}\geqslant 0$，

$\therefore\ 7-8x>0$，

即必须 $$x<\frac{7}{8}. \tag{3}$$

将不等式(2)两边平方，得

$$49+64x^2-112x>16(x+1),$$

（在条件(1)、(3)之下，所得不等式与原不等式等价。）

即 $$64x^2-128x+33>o,$$

$$\therefore\quad x>\frac{8+\sqrt{31}}{8}\quad 或\quad x<\frac{8-\sqrt{31}}{8}.$$

由于 $\frac{8+\sqrt{31}}{8}>1>\frac{7}{8}$，不满足必要条件(3)，所以 $x>\frac{8+\sqrt{31}}{8}$ 不是原不等式的解。

对于 $x<\frac{8-\sqrt{31}}{8}$，同时考虑 x 的容许值集(1)，可得原不等式的解为

$$-1\leqslant x<\frac{8-\sqrt{31}}{8}.$$

题3 解法一 按点 X、Y 的位置分下面四种情况来考虑(图 4-1)：

① 当 X 在 AB 上，这时 Y 在 $B'C'$ 上，并有 $AX=B'Y$。作正方体的中截面 α（由 AA'、BB'、CC'、DD' 四棱的

中点 A_0、B_0、C_0、D_0 确定的平面)，并作 $XX_0\perp\alpha$，$YY_0\perp\alpha$，垂足分别为 X_0、Y_0，它们必定分别在 A_0B_0 与 B_0C_0 上，并且 $A_0X_0=AX$，$B_0Y_0=B'Y$，故有 $A_0X_0=B_0Y_0$。

这时，XY 的中点 Z 必定在中截面 α 上，并且它就是 X_0Y_0 的中点. 于是，线段 XY 的中点的轨迹就是平面 α 上的线段 X_0Y_0 的中点的轨迹，而这个轨迹就是线段 Z_1Z_2，其中 Z_1 是 A_0B_0 的中点，Z_2 是 B_0C_0 的中点.

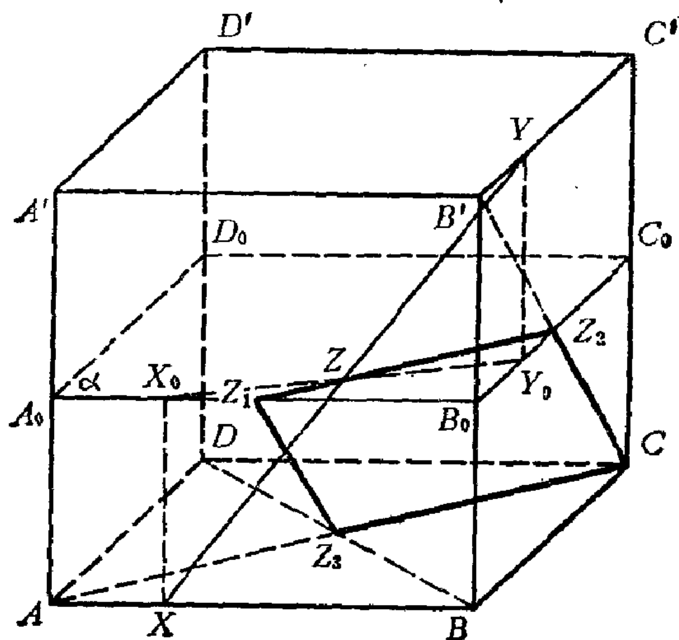


图 4-1

② 当X在 BC 上，这时Y在 $C'C$ 上，并有 $BX=C'Y$。

这时 X、Y 都在平面 $BCC'B'$ 上，且 $XY /\!/ BC'$，所以这些 XY 的中点 Z 的轨迹是对角线 CB' 上的线段 Z_2C。

③ 当X在 CD 上，这时Y在 CB 上，并有 $CX=CY$。

这时 X、Y 都在平面 $ABCD$ 上，且 $XY /\!/ BD$，所以这些 XY 的中点 Z 的轨迹是对角线 CA 上的线段 CZ_3 (Z_3 是正

方形 $ABCD$ 两对角线的交点)。

④ 当X在 DA 上,这时Y在 BB'上,并有 $DX=BY$。

这时与①相仿,可得 XY 的中点Z的轨迹是线段 Z_3Z_1。

综上所述,所求线段 XY 的中点Z的轨迹是封闭折线 $Z_1Z_2CZ_3Z_1$。再由$Z_1Z_2=Z_2C=CZ_3$(都等于正方体一个面"正方形"的对角线的一半)及 $Z_1Z_2 /\!/ Z_3C$(都平行于 A_0C_0)可知,$Z_1Z_2CZ_3$ 是一个菱形,因此可以说:

所求 XY 的中点Z的轨迹是菱形 $Z_1Z_2CZ_3$。

解法二 (参看图4-1) 以正方体的一个顶点A为原点,AB、AD、AA' 分别为 x、y、z 轴,以棱长为度量单位,建立直角坐标系。并将点X 通过 $ABCDA$ 的时间的$\frac{1}{4}$取作时间单位。

显然,如果一点P作等速直线运动,那么点P的各坐标都是时间 t 的一次函数;反之,如果一点P的各坐标都是时间 t 的一次函数,那么这点作的是等速直线运动。

根据这个结论,并利用中点坐标公式,可得动点 X、Y与Z的坐标与时间 t 之间的关系,如下页表所示。

从表中不难得到:当$t=0$、1、2、3、4时,动点Z分别位于点$Z_1\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$、$Z_2\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$、$C(1, 1, 0)$、$Z_3\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$、$Z_1\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$,而点$Z$的坐标$(x、y、z)$在各区间内都是时间 t 的一次函数,所以在各时间区间内,动点Z作的是等速直线运动,分别形成线段 Z_1Z_2、Z_2C、CZ_3、Z_3Z_1,也就是说,动点Z的轨迹是菱形 $Z_1Z_2CZ_3Z_1$。

		$0\leqslant t\leqslant 1$	$1\leqslant t\leqslant 2$	$2\leqslant t\leqslant 3$	$3\leqslant t\leqslant 4$
X	x	t	1	$3-t$	0
	y	0	$t-1$	1	$4-t$
	z	0	0	0	0
Y	x	1	1	1	1
	y	t	1	$3-t$	0
	z	1	$2-t$	0	$t-3$
Z	x	$\frac{1+t}{2}$	1	$\frac{4-t}{2}$	$\frac{1}{2}$
	y	$\frac{t}{2}$	$\frac{t}{2}$	$\frac{4-t}{2}$	$\frac{4-t}{2}$
	z	$\frac{1}{2}$	$\frac{2-t}{2}$	0	$\frac{t-3}{2}$

题 4 $\cos^2 x+\cos^2 2x+\cos^2 3x=1$，

即
$$\frac{1+\cos 2x}{2}+\cos^2 2x+\frac{1+\cos 6x}{2}=1,$$

$$\cos 2x+\cos 6x+2\cos^2 2x=0,$$

$$2\cos 4x\cdot\cos 2x+2\cos^2 2x=0,$$

$$2\cos 2x(\cos 4x+\cos 2x)=0,$$

或
$$4\cos x\cos 2x\cos 3x=0.$$

$\therefore$ $\cos x=0$ 或 $\cos 2x=0$ 或 $\cos 3x=0$。

由 $\cos x=0$ 得， $x=k\pi+\frac{\pi}{2}$ （k 为整数）；

由 $\cos 2x=0$ 得，$x=k\cdot\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$ （k 为整数）；

由 $\cos 3x=0$ 得，$x=k\cdot\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}$ （k 为整数），

注意，由 $\cos 3x=0$ 得到的一组解 $x=k\cdot\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}$ 中，包含了由 $\cos x=0$ 得到的一组解 $x=k\pi+\frac{\pi}{2}$，事实上，只要在前一组解的公式中取 $k=3k'+1$（k' 是整数），就有 $x=k\cdot\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}=(3k'+1)\cdot\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}=k'\pi+\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)=k'\pi+\frac{\pi}{2}$。

于是得原方程的解为：

$$x=k\cdot\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\quad 或 \quad x=k\cdot\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\quad（k 为整数）.$$

题5　四边形 $ABCD$ 存在内切圆的充分必要条件是

$$AD+BC=AB+CD \tag{1}$$

下面分三种可能情况来讨论。

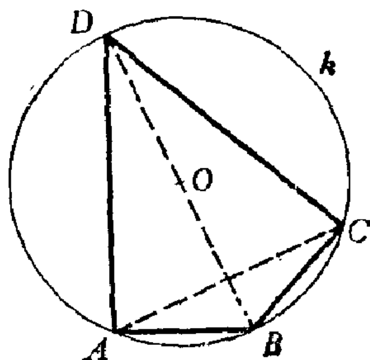


图 4-2

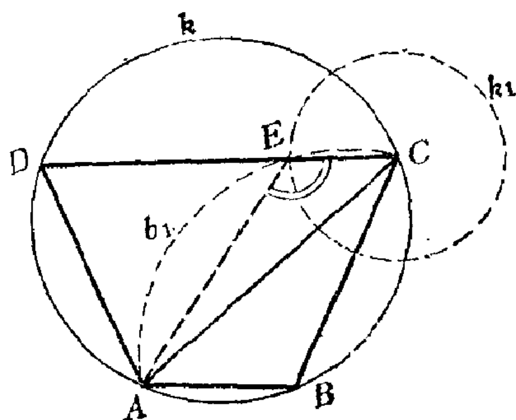


图 4-3

① 如果 $AB=BC$，则由 (1) 可知 $AD=CD$，即 D 点在 AC 的垂直平分线上，即在过 B 点的一条直径上。所以只要过 B 点作圆 k 的直径，直径的另一个端点就是所求作的

D点(图 4-2)。

② 如果 $AB<BC$,(1) 式可写为

$$BC-AB=CD-AD$$

假定符合要求的D点已作出(图 4-3),在 DC 上截取$DE=AD$, 则有

$$CE=CD-DE=CD-AD=BC-AB,$$

即E点在以C为圆心, $BC-AB$为半径的圆周 k_1 上;

另一方面,A、B、C、D 在同一圆周 k 上, 必须且只须

$$\angle ADC+\angle ABC=180°,$$

$$\therefore\quad \angle AEC=180°-\angle AED$$

$$=180°-\left(90°-\frac{1}{2}\angle ADC\right)=90°+\frac{1}{2}\angle ADC$$

$$=90°+\frac{1}{2}\cdot(180°-\angle ABC)$$

$$=180°-\frac{1}{2}\angle ABC.$$

即E点在线段AC上圆周角等于$180°-\frac{1}{2}\angle ABC$的弓形弧 b_1 上(弓形弧 b_1 与 B点分布在 AC 的两侧)。

据此可得作法:以C为圆心、$BC-AB$为半径作圆 k_1;在线段 AC 上作圆周角等于 $180°-\frac{1}{2}\angle ABC$ 的弓形弧 b_1; 设圆 k_1 与弓形弧 b_1 相交于E点, 连结 CE 并延长与圆周 k 的交点即为所求作的D点。

③ 如果 $AB>BC$,可仿照②作出。

题 6 证法一 如图 4-4,设 $\triangle ABC$ 中,$AB=AC$, O是外心,I 是内心。过A作外接圆 $\odot O$ 的直径 AD,交 BC 于E。

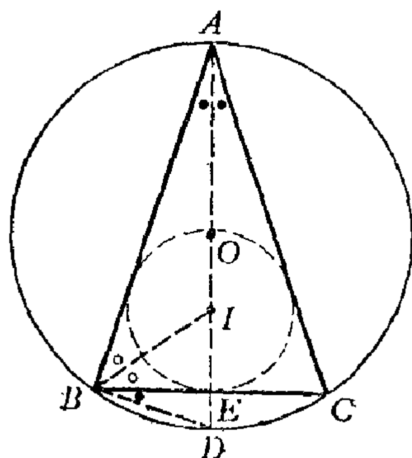


图 4-4

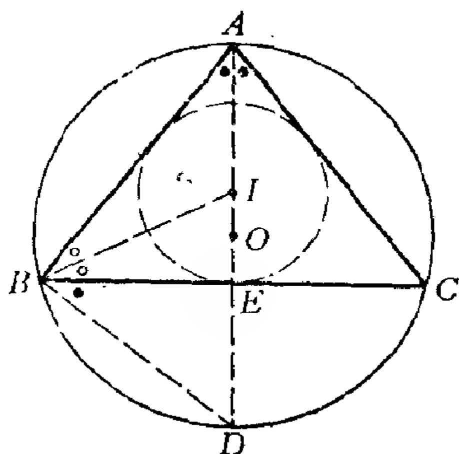


图 4-5

由等腰三角形的对称性可知，$\angle BAD=\angle DAC$，I 在 AD 上。

连结 BI、BD，则 $\angle BID=\angle BAD+\angle ABI$，$\angle IBD=\angle DBC+\angle IBE$，因为 $\angle BAD=\angle DAC=\angle DBC$，$\angle ABI=\angle IBE$，所以 $\angle BID=\angle IBD$，从而 $DI=DB$。

在直角三角形 ABD 中，有 $DB^2=DE\cdot AD$，由 $DI=DB$，$AD=2r$，$DE=DI-EI=DI-\rho$，可得

$$DI^2=2r\cdot(DI-\rho)。\qquad (1)$$

又∵ $d=IO=|DO-DI|=|r-DI|$，

〔当 $\angle A\leqslant 60°$ 时（图 4-4），$d=r-DI$；当 $\angle A>60°$ 时（图 4-5），$d=DI-r$。〕

∴ $d^2=|r-DI|^2=r^2-2r\cdot DI+DI^2$。

将(1)代入，得

$$\begin{aligned}d^2&=r^2-2r\cdot DI+2r\cdot(DI-\rho)\\&=r^2-2r\rho=r(r-2\rho),\end{aligned}$$

∴ $d=\sqrt{r(r-2\rho)}$。

证法二　如图 4-6，连结 CI 交 $\triangle ABC$ 的外接圆于点 F，连结 BI、BF. 因为 $\angle ABI=\angle IBC$，$\angle FBA=\angle ACF=\angle ICB$，而 $\angle FIB=\angle IBC+\angle ICB$，$\angle FBI=\angle ABI+\angle FBA$，所以

$$\angle FIB=\angle FBI,$$

$$\therefore\quad FB=FI.$$

连结 FO 交 $\triangle ABC$ 的外接圆于点 G，连结 BG. 在 $\triangle IEC$ 与 $\triangle FBG$ 中，因为 $\angle IEC=\angle FBG=90°$，$\angle ICE=\angle FGB$，所以 $\triangle IEC\backsim\triangle FBG$，从而

$$\frac{CI}{GF}=\frac{IE}{FB}.$$

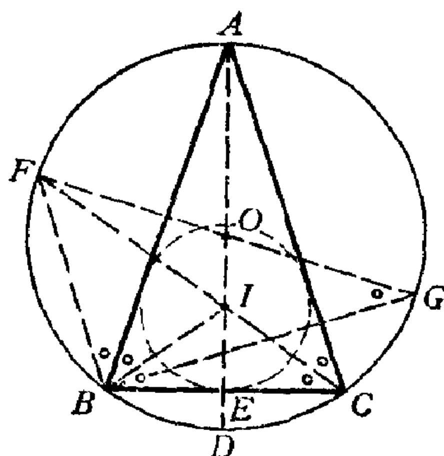


图 4-6

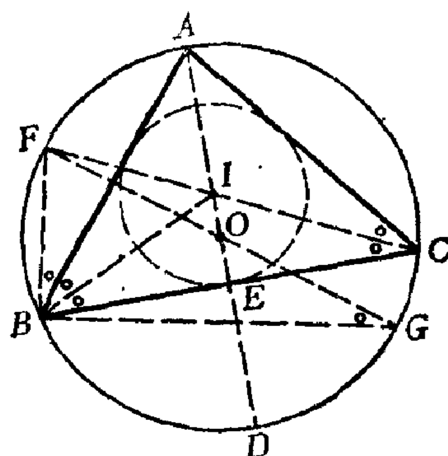


图 4-7

因为 $GF=2r$，$IE=p$，$FB=FI$，故得

$$CI\cdot FI=2rp.$$

又 $\because$ $CI\cdot FI=AI\cdot DI$，

而 $$AI\cdot DI=(r+d)(r-d)$$

〔当 $\angle A\leqslant 60°$ 时（图4-6），$AI=r+d$，$DI=r-d$；当 $\angle A>60°$

时（图 4-7），$AI=r-d, DI=r+d$。〕

$\therefore \quad (r+d)(r-d)=2r\rho$

得 $\quad d^2=r^2-2r\rho$，

即 $\quad d=\sqrt{r(r-2\rho)}$。

注：本题的条件尚可减弱，实际上这个结论对于任意三角形都是成立的，这就是有名的尤拉公式。其证明只须在上述证明的基础上作不多的改变就可以了。如在证法二中，若 $\triangle ABC$ 是任意三角形，如图 4-8 所示，同样可得 $CI\cdot FI=2r\rho$，然后连结 OI，交 $\triangle ABC$ 的外接圆于 X、Y 两点，显然有

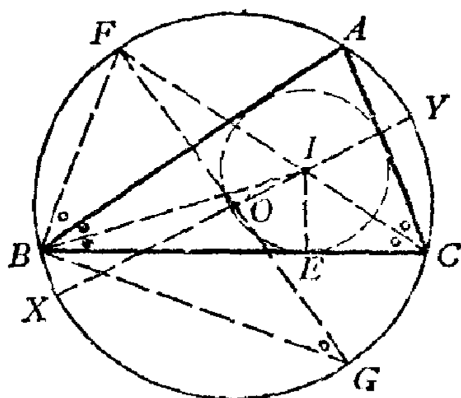


图 4-8

$$CI\cdot FI=XI\cdot YI,$$

而 $XI=r+d$，$YI=r-d$，从而得

$$(r+d)(r-d)=2r\rho,$$

同样得 $\quad d=\sqrt{r(r-2\rho)}$。

题 7 证法一

（I）首先指出，由于和四面体六条棱都相切的球的球心到四面体的六条棱的距离都相等，因此，这样的球的球心必定在已知四面体的三面角的内部，即在四面体的内部，或者在四面体的外部但在四面体的某一三面角的内部。

既然已知存在五个与四面体的六条棱（或其延长线）均相切的球，那么在四面体每一个三面角内部都有两个球的球心，而这样的两个球与四面体的棱或其延长线相切，一个球的球心在四面体的内部，这个球切四面体的六条棱于内点，另一

个球的球心在四面体的外部，这个球切四面体的三条棱于内点，而切另三条棱于外点(即延长线上的点)。

设 O_1 为分别切四面体 $SABC$ 六条棱 SA、SB、SC、AB、BC 与 CA 于内点 M、N、P、Q、R 与 T 的球的球心，O_2 为切四面体 $SABC$ 的三条棱 SA、SB、SC 于延长线上的点 M'、N'、P'，而与另三条棱切于内点的球的球心(图 4-9)。现在首先证明球 O_1 和 O_2 分别与棱 AB、BC、CA 相切于相同的点 Q、R、T。

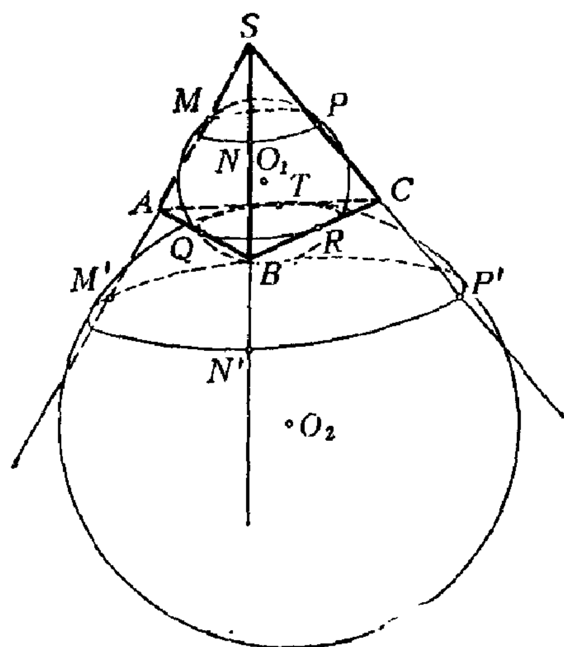


图 4-9

因为，球 O_1 分别切 AB、BC、CA 于 Q、R、T，因此球O_1与平面 ABC所交成的小圆即为过 Q、R、T 的圆，显然这个圆就是 ΔABC 的内切圆。

同理，球 O_2 与平面 ABC 所交成的小圆，也是 ΔABC 的内切圆，因为 ΔABC 的内切圆只有一个，所以这两圆就是同一个圆，球 O_2 与 AB、BC、CA 的切点，也就是 ΔABC 的内切圆与 ΔABC 的三边的切点 Q、R、T，两个球 O_1 与 O_2 的交线也就是 ΔABC 的内切圆。

我们还知道，自球外一点引球的切线，它们的长都是相等的，因此有

$$SM=SN=SP, \tag{1}$$

$$SM' = SN' = SP'. \tag{2}$$

(2)减(1)得

$$MM' = NN' = PP'.$$

又 ∵ $AM' = AQ = AM$,

∴ $AM = \frac{1}{2} MM'$.

同理得 $BN = \frac{1}{2} NN'$, $CP = \frac{1}{2} PP'$

$$∴ \quad AM = BN = CP. \tag{3}$$

(1)加(3)得 $SM + AM = SN + BN = SP + CP$,

即 $SA = SB = SC$.

同理得 $AS = AB = AC$,

$BS = BA = BC$,

$CS = CA = CB$,

∴ $SA = SB = SC = AB = AC = BC$.

因此，四面体 $SABC$ 为一正四面体.

（Ⅱ）如果四面体 $SABC$ 为正四面体，并设 M、N、P、Q、R、T 分别为棱 SA、SB、SC、AB、BC、CA 的中点，那么容易知道

$$MR = NT = PQ,$$

并有 MR、NT、PQ 三线段交于一点 O_1，且三线段均被 O_1 平分，另外还有

$MR \perp SA$、$MR \perp BC$、$NT \perp SB$、

$NT \perp AC$、$PQ \perp SC$、$PQ \perp AB$.

所以我们如果以 O_1 为球心，O_1M 为半径作球 O_1，那么球 O_1 必与正四面体 $SABC$ 的各棱相切于它们的中点 M、N、P、

Q、R、T(图 4-10)。

图 4-10

其次，我们在四面体 $SABC$ 的棱 SA、SB、SC 的延长线上分别取 M'、N'、P'，使 $AM'=BN'=CP'=MA(=\frac{1}{2}$四面体棱长)，再在两相交直线 SA、SO_1 所决定的平面上，过 M' 作 SA 的垂线交 SO_1 直线于 O_2，那么显然有

$$\frac{SM}{SM'}=\frac{SO_1}{SO_2}=\frac{O_1M}{O_2M'},$$

$$\because \quad \frac{SN}{SN'}=\frac{SM}{SM'},$$

$$\therefore \quad \frac{SN}{SN'}=\frac{SO_1}{SO_2};$$

从而得　$O_1N /\!/ O_2N'$，

$$\therefore \quad \frac{O_1N}{O_2N'}=\frac{SO_1}{SO_2}=\frac{O_1M}{O_2M'}.$$

$\because$　$O_1N=O_1M$，$O_1N\perp SB$，

$\therefore$　$O_2N'=O_2M'$，$O_2N'\perp SB$。

同理得　$O_2P'=O_2M'$，$O_2P'\perp SC$。

再连 O_2Q，我们来证明 $O_2Q\perp AB$，且 $O_2Q=O_2M'$。

设 SO_1 交平面 ABC 于 I，那么，容易知道 I 是正三角

形 ABC 的外心（从而也是内心、垂心），因此 $IQ \perp AB$，又因为 $SQ \perp AB$，所以就有

$$O_2Q \perp AB.$$

在直角三角形 O_2AM' 与 O_2AQ 中，

$\because$ $AM' = AQ$，O_2A 公共，

$\therefore$ $Rt.\Delta O_2AM' \cong Rt.\Delta O_2AQ$，

从而 $O_2Q = O_2M'$.

同理可得 $O_2R \perp BC$ 且 $O_2R = O_2N'$，和

$O_2T \perp AC$ 且 $O_2T = O_2P'$.

$\therefore$ $O_2M' = O_2N' = O_2P' = O_2Q = O_2R = O_2T$，

并且O_2M'、O_2N'、O_2P'、O_2Q、O_2R、O_2T分别垂直于对应的四面体的棱，所以如果以 O_2 为球心，O_2M' 为半径作球 O_2，那么球 O_2 一定和四面体的六条棱（或其延长线）SA、SB、SC、AB、BC、CA 分别切于点 M'、N'、P'、Q、R、T.

完全同样地我们可以在正四面体 $SABC$ 的另外三个三面角 $A\text{-}SBC$、$B\text{-}SCA$、$C\text{-}SAB$ 内作出类似于球 O_2 的球 O_3、O_4、O_5，它们分别都切于四面体的六条棱（或棱的延长线）.

这样，我们就证明了正四面体必定存在五个球，这五个球分别切于四面体的各棱或其延长线.

证法二 设球Ω与四面体 $SABC$ 各棱所在的直线都相切，这时球Ω被四面体的每一个面相截，截线为对应三角形的内切圆或傍切圆. 同时，相交于某一棱的两个面上的两个圆具有一个公共点，这个点就是球与该棱所在直线的切点.

有两种可能情况：

① 球的每一切点都在棱的内部. 这时，各面上截得的圆

都是对应三角形的内切圆。

球Ω必定通过ΔABC的内切圆与对应边BC、CA、AB的切点R、T、Q，也通过ΔSAB的内切圆与边SA的切点M（参看图 4-9）。因为点R、T、Q不在一直线上，所以点M不在平面RTQ上。由于过不共面的四点R、T、Q、M可以作一个也只能作一个球，所以这种第一类球如果存在的话，那么至多只有一个。

② 球的切点中至少有一个在棱的外部（在棱的延长线上）。为确定起见，设这条棱是SA，球Ω与SA所在直线的切点M'在SA的延长线上点A的外侧（即点A在S、M'之间），这时与SA、SC及AC相切的圆是ΔSAC的傍切圆，该圆与顶点S分布在AC的两侧。因此它与棱AC相切于点T，与棱SC的延长线相切于点P'，点P'在点C的外侧（即点C在S、P'之间）。同理，平面SAB上的圆与棱SA的延长线相切于点M'，与棱AB相切于某一点Q，与棱SB的延长线相切于点N'；在平面SBC上的圆与直线SB、SC相切于点N'、P'，且与棱BC相切于某一点R。因此，这个第二类球与面ΔABC上的三条棱相切，而与棱SA、SB、SC的延长线相切，同时切点分别位于点A、B、C的外侧（即A、B、C位于对应的切点与点S之间）。

与①相仿，我们可以证明，象这种与一个面ΔABC的各棱相切，而与其余各棱的延长线相切的球至多只有一个。因此，第二类的球的总数至多只有四个。

（I）设所有这五个球都存在，我们要证明四面体$SABC$是正四面体。

设四面体$SABC$的各棱长分别为：

$$SA=a,\ SB=b,\ SC=c,$$
$$BC=a',\ AC=b',\ AB=c'.$$

设 M、N、P、R、T、Q 是第一类球的切点，则有 $SM=SN=SP$，$AM=AT=AQ$，$BN=BR=BQ$，$CP=CR=CT$。又因 $AM+SM=SA$，$BR+CR=BC$ 等等，可得

$$a+a'=b+b'=c+c' \qquad (1)$$

考察与面 $\triangle ABC$ 相对应的第二类的球，有 $SM'-AM'=SA$，$BR+RC=BC$，$SN'-BN'=SB$，$AT+TC=AC$，$SP'-CP'=SC$，$AQ+QB=AB$，可得

$$a-a'=b-b'=c-c' \qquad (2)$$

由(1)、(2)可得

$$a=b=c,\ a'=b'=c'.$$

如果再考察对应于面 SAB 的第二类的球，用同样的方法可得 $c'=a=b$。

因此就证明了 $a=b=c=a'=b'=c'$，即四面体 $SABC$ 是正四面体。

(Ⅱ) 我们再来证明：正四面体必定存在五个这样的球。

设点 O_1 是正四面体 $SABC$ 的中心，以 O_1 为球心，通过某一棱中点的球 Ω 必定通过其余五条棱的中点，并且与各棱均相切。再以点 S 为位似中心，相似系数为 3 作位似变换，将这个球 Ω 变为球 Ω_1，它必定与各棱所在的直线均相切，它是一个第二类的球。以正四面体的每一个顶点为位似中心，作这样的位似变换，便可作出四个第二类的球。

第　五　届

第五届国际数学奥林匹克于一九六三年七月五日至十三日在波兰举行，参加的国家有：保加利亚，匈牙利，德意志民主共和国，波兰，罗马尼亚，苏联，捷克斯洛伐克，南斯拉夫。

竞　赛　题

题1　求方程$\sqrt{x^2-p}+2\sqrt{x^2-1}=x$的全部实数根，其中$p$为实参数。

（捷克斯洛伐克，6分）

题2　在空间求直角顶点的轨迹，此直角的一边通过已知点A，另一边与已知线段BC至少有一个公共点。

（苏联，7分）

题3　已知凸n边形的各角都相等，并且顺次各边满足关系：$a_1\geqslant a_2\geqslant a_3\geqslant\cdots\geqslant a_n$，求证$a_1=a_2=a_3=\cdots=a_n$。

（匈牙利，7分）

题4　解方程组

$$\begin{cases}x_5+x_2=yx_1\\x_1+x_3=yx_2\\x_2+x_4=yx_3\\x_3+x_5=yx_4\\x_4+x_1=yx_5.\end{cases}$$

其中 y 是参数。

（苏联，6 分）

题 5 证明：$\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}=\frac{1}{2}$。

（德意志民主共和国，6 分）

题 6 五个学生 A、B、C、D、E 参加某一项比赛，甲、乙两人在猜测比赛的结果。甲猜想的名次顺序为 A、B、C、D、E，结果没有猜中任何一个学生的名次，也没有猜中任何一对学生的名次是相邻的（所谓一对学生的名次是相邻的，是指其中一个的名次紧接着另一个的名次）；乙猜想的名次顺序为 D、A、E、C、B，结果猜中了两个学生的名次，并且猜中了两对学生的名次是相邻的。问比赛的实际结果是怎样的？

（匈牙利，8 分）

题　　解

题 1 $\sqrt{x^2-p}+2\sqrt{x^2-1}=x,$ (1)

移项，得 $\sqrt{x^2-p}=x-2\sqrt{x^2-1}$，

两边平方，得 $x^2-p=x^2+4(x^2-1)-4x\sqrt{x^2-1}$，

移项，得 $4x\sqrt{x^2-1}=4(x^2-1)+p$，

两边平方，得 $16x^2(x^2-1)=16(x^2-1)^2+p^2+8p(x^2-1)$，

整理后得 $8(2-p)x^2=(p-4)^2$。 (2)

若 $p=2$，有 $8(2-p)=0$，而 $(4-p)^2=4$，方程(2)无解，即原方程无解。

若 $p>2$，则对于任意实数 x，有 $8(2-p)x^2\leqslant0$，而 $(p-4)^2\geqslant0$，故要使方程(2)有解，仅当 $p=4$ 时，即 $x=0$ 成立。

但 $x=0$ 代入原方程(1)，其左边没有意义，故 $x=0$ 不是原方程的解．因此，当 $p>2$ 时，原方程无解．

若 $p<2$，由方程(2)得

$$x^2=\frac{(4-p)^2}{8(2-p)},$$

而由方程(1)可知，必有 $x>0$，所以得

$$x=\frac{4-p}{2\sqrt{2(2-p)}}. \qquad (3)$$

由于上面由(1)变形到(2)时，方程两边平方，可能产生增根．为此，必须将(3)代入原方程(1)检验．将(3)代入(1)，得

$$\frac{|3p-4|}{2\sqrt{2(2-p)}}+\frac{2|p|}{2\sqrt{2(2-p)}}=\frac{4-p}{2\sqrt{2(2-p)}},$$

即
$$|3p-4|+2|p|=4-p. \qquad (4)$$

当 $p<0$ 时，(4)为

$$(4-3p)-2p=4-p,$$

$$4-5p=4-p,$$

即
$$p=0.$$

所以当 $p<0$ 时，等式(4)不可能成立，因此(3)不是原方程的解，即原方程无解；

当 $0\leqslant p\leqslant\frac{4}{3}$ 时，(4)式成为

$$(4-3p)+2p=4-p$$

显然是成立的，即这时(3)是原方程的解．

当 $\frac{4}{3}<p<2$ 时，(4)式成为

$$(3p-4)+2p=4-p,$$

$$5p-4=4-p,$$

即 $$p=\frac{4}{3}.$$

但$\frac{4}{3}<p<2$，显然(4)不可能成立，所以这时(3)不是原方程的解，即这时原方程无解。

综上所述，得：

当 $p<0$ 或 $p>\frac{4}{3}$ 时，原方程无解；

当 $0\leqslant p\leqslant\frac{4}{3}$ 时，原方程有唯一解：

$$x=\frac{4-p}{2\sqrt{2(2-p)}}.$$

题2 先求平面 ABC 上符合条件的点的轨迹。

若A点不在直线 BC 上（图 5-1），分别以线段 AB、AC 为直径作圆 $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$，则所求的轨迹是这两圆的内部区域（包括边界在内）除去两圆公共部分后所得的点集。如果用 K_1、K_2 分别表示两圆的内部区域（不包括边界），用 $\overline{K}_1$、$\overline{K}_2$ 分别表示两圆的内部区域（包括边界在内），则所求的轨迹可以表示为$(\overline{K}_1\cup\overline{K}_2)\sim(K_1\cap K_2)$。下面我们来证明这个结论。

设 l 为过A点的任意一条直线，作线段 BC 在 l 上的正射影 B_lC_l（图 5-2）。显然，线段 B_lC_l 上的任一点符合条件（即可以作为符合题给条件的直角顶点），而在直线 l 上位于线段 B_lC_l 外的任一点都不符合条件。

因为 $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 分别是以 AB、AC 为直径的圆，它们就是通过 A、B 或通过 A C 的直角顶点的轨迹，所以当直线

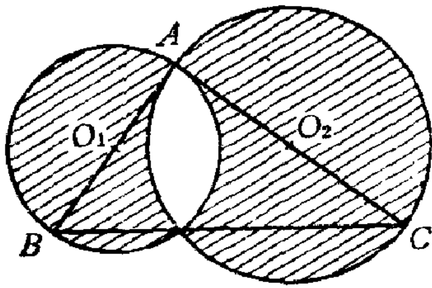


图 5-1

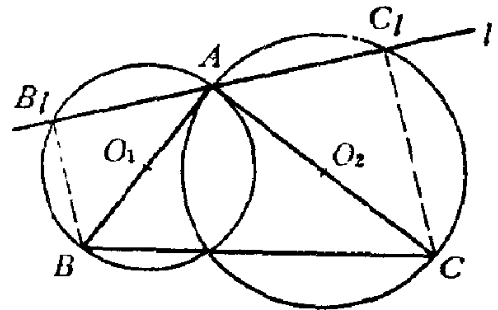


图 5-2

l 绕 A 点旋转时，点 B_l、C_l 相应地就画出了 $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$。当直线 l 与两圆之一相切时，B_l 或 C_l 就与 A 点重合；当直线 l 与两圆都不相切（即均相交）时，B_l、C_l 就分别是直线 l 和 $\odot O_1$、$\odot O_2$ 的另一个交点。

先证明在区域 $(\overline{K}_1\cup\overline{K}_2)\sim(K_1\cap K_2)$ 内的任一点符合条件。设 P 是这个区域内的任一点，那么它或者属于 $\overline{K}_1$ 而不属于 K_2（即 $P\in\overline{K}_1\sim K_2$），或者属于 $\overline{K}_2$ 而不属于 K_1（即 $P\in\overline{K}_2\sim K_1$）。如果 $P\in\overline{K}_1\sim K_2$，过 P、A 两点作直线 l，与 $\odot O_1$、$\odot O_2$ 必相交，设另一交点分别为 B_l、C_l，这时 P 点必定在 A、B_l 两点之间，而 C_l 在线段 AP 上（图 5-3）或在 AP 的反向延长线上（图 5-4）。总之，P 点必定在 B_l 与 C_l 之间，即

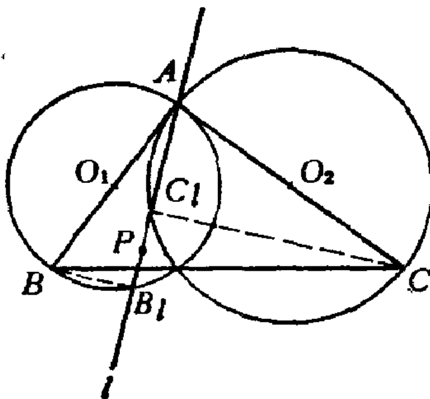


图 5-3

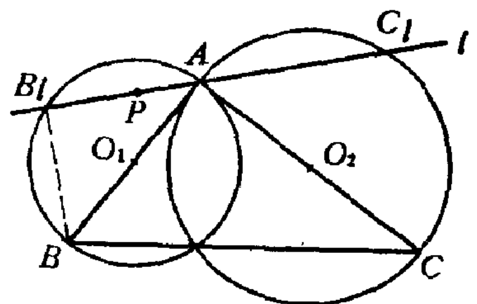


图 5-4

在线段 B_lC_l 上，所以P 点符合条件。如果$P\in\overline{K}_2\sim K_1$，同样可证$P$点符合条件。

再证明区域$(\overline{K}_1\cup\overline{K}_2)\sim(K_1\cap K_2)$ 外部的任一点不符合条件。设P 是区域外部的任一点，那么它或者在两圆的外部，或者在两圆的公共部分。

如果点P在两圆 $\overline{K}_1$、$\overline{K}_2$ 的外部(图 5-5)，过 A、P 两点的直线 l 分别与两圆周相交于另一点 B_l、C_l，这时截得的线段 PC_l(或 PB_l)必定大于 B_lC_l，即P 点在线段 B_lC_l 之外，因此P 点不符合条件；

如果点P在两圆的公共部分，即$P\in K_1\cap K_2$(图 5-6)，过 A、P 作直线 l，显然，线段 AB_l 是 l 与 K_1 的交线，线段 AC_l 是 l 与 K_2 的交线，而 AP 在线段 AB_l 与 AC_l 的公共部分上，它必在线段 B_lC_l 外，所以P 点不符合条件。

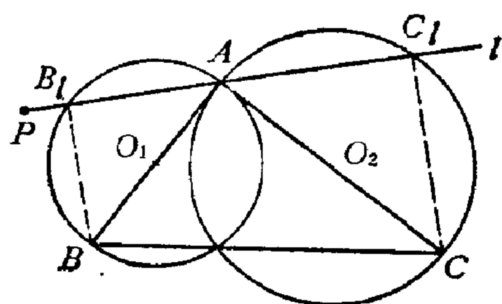


图 5-5

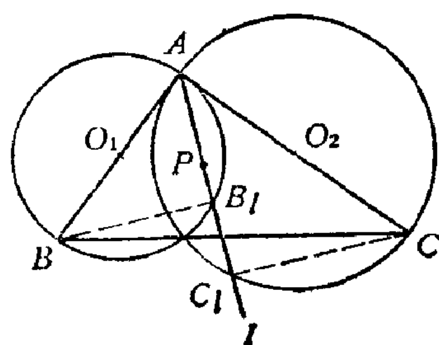
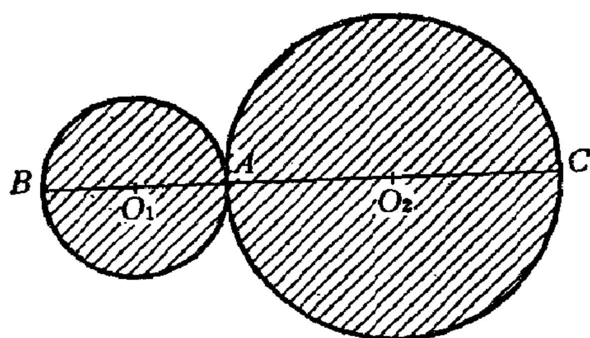
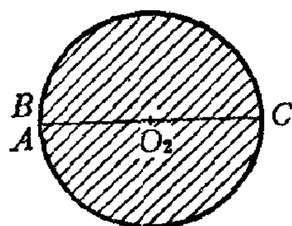


图 5-6

这样，我们证明了在区域$(\overline{K}_1\cup\overline{K}_2)\sim(K_1\cap K_2)$内的任一点符合条件，而这个区域外的任一点不符合条件。这就是说，$(\overline{K}_1\cup\overline{K}_2)\sim(K_1\cap K_2)$是所求直角顶点的轨迹。

若A点在直线 BC 上，它可以看作上述一般情况的极限





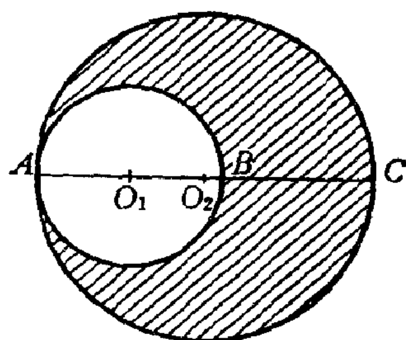


图 5-8　　　　图 5-9

位置，所求的轨迹也是$(\overline{K}_1\cup\overline{K}_2)\sim(K_1\cap K_2)$(图 5-7，5-8，5-9)。

在空间，所求直角顶点的轨迹是由上述平面 ABC 上的轨迹绕两圆的连心线 O_1O_2 旋转所得到的区域，即是以 AB、AC 为直径的两个球的内部(包括边界面在内)除去两球公共部分的所有点的集合。

题 3　当 n 为奇数时，设 $n=2k+1$(k 为正整数)，在凸 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 内作 a_1 与 a_n 两边的夹角 $\angle A_1$ 的平分线 A_1B，交 $A_{k+1}A_{k+2}$ 于点 B(图 5-10)。由于已知 n 边形的各角都相等，所以 $A_1B\perp A_{k+1}A_{k+2}$，因此折线 $A_1A_2\cdots A_{k+1}$ 与折线 $A_1A_n\cdots A_{k+2}$ 在这条角平分线上的射影相等(都等于

A_1B)．另一方面，由于 n 边形是凸的，所以上述两折线在角平分线上的射影分别等于折线各段射影的和．又因 A_1A_2 与 A_1A_n，A_2A_3 与 A_nA_{n-1}，…，一般地 A_iA_{i+1} 与 $A_{n-i+2}A_{n-i+1}$ $(i\leqslant k)$分别与这条角平分线组成等角，并由 $a_1\geqslant a_2\geqslant a_3\geqslant\cdots\geqslant a_n$可知，$A_iA_{i+1}$ 的射影$\geqslant A_{n-i+2}A_{n-i+1}$的射影$(i\leqslant k)$．由此可见，如果在 $a_1\geqslant a_2\geqslant a_3\geqslant\cdots\geqslant a_n$ 中至少有一个是严格的不等式(即不相等)，那么对应的射影也就有严格的不等式．这样，折线 $A_1A_2\cdots A_{k+1}$ 的射影就要大于折线 $A_1A_n\cdots A_{k+2}$的射影，与前面推出的"射影相等"这个结论矛盾，所以得

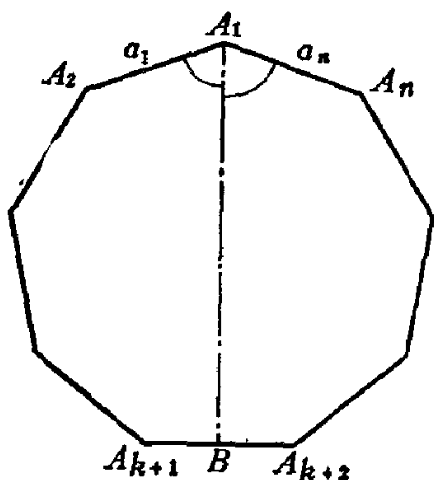


图 5-10

$$a_1=a_2=a_3=\cdots=a_n.$$

当 n 为偶数时，设 $n=2k$，只要作 A_1A_n 的垂线(它必与 A_kA_{k+1} 垂直)，然后可仿照上面类似地加以证明．

题 4

$$\begin{cases}x_5+x_2=yx_1 & (1)\\ x_1+x_3=yx_2 & (2)\\ x_2+x_4=yx_3 & (3)\\ x_3+x_5=yx_4 & (4)\\ x_4+x_1=yx_5 & (5)\end{cases}$$

显然，对于任意的 y 值，$x_1=x_2=x_3=x_4=x_5=0$ 是方程的一组解．下面我们再求"非平凡解"(即至少有一个 $x_i\neq 0$，$i=1,2,\cdots,5$．)

由(1)、(5)分别得

$$x_2=yx_1-x_5, \quad (6)$$

$$x_4=yx_5-x_1. \quad (7)$$

而由(2)、(4)分别得

$$x_3=yx_2-x_1, \quad (8)$$

$$x_3=yx_4-x_5. \quad (9)$$

将(6)、(7)分别代入(8)、(9)，得

$$x_3=(y^2-1)x_1-yx_5, \quad (10)$$

$$x_3=(y^2-1)x_5-yx_1. \quad (11)$$

$$\therefore \quad (y^2-1)x_1-yx_5=(y^2-1)x_5-yx_1,$$

即 $$(y^2+y-1)\cdot(x_1-x_5)=0. \quad (12)$$

若 $y^2+y-1\neq0$，得

$$x_1-x_5=0$$

即 $$x_1=x_5.$$

类似地，只要循环地变换方程的编号与未知数的足码，可得. $x_1=x_2=x_3=x_4=x_5$。当 $x_i\neq0$ 时，代入原方程组中任何一个方程，可得 $y=2$。不难检验，当 $y=2$ 时，$x_1=x_2=x_3=x_4=x_5\neq0$ 是原方程组的"非平凡解."而当 $y^2+y-1\neq0$，$y\neq2$ 时，原方程组只有平凡解：$x_1=x_2=x_3=x_4=x_5=0$；

若 $y^2+y-1=0$，即 $y^2-1=-y$，代入方程(10)或(11)可得同样的方程：

$$x_3=-y(x_1+x_5) \quad (13)$$

这时，方程(6)、(7)、(13)就等价于方程(1)、(2)、(4)、(5)。并且我们还可以证明：方程(6)、(7)、(13)的任一组解必定满足(3)，事实上，由(6)、(7)得

$$x_2+x_4=(y-1)(x_1+x_5),$$

而由(13)得 $yx_3=-y^2(x_1+x_5)$，

由于 $y^2+y-1=0$，即 $y-1=-y^2$，故有

$$x_2+x_4=yx_3.$$

因此，当 $y^2+y-1=0$，即 $y=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ 时，原方程组等价于三个方程(6)、(7)、(13)，我们可以任意取 x_1、x_5 的值，再由(6)确定 x_2，由(7)确定 x_4，由(13)确定 x_3。

总之，原方程组的解为：

① 当 $y\neq\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$，$y\neq 2$ 时，只有平凡解：

$$x_1=x_2=x_3=x_4=x_5=0;$$

② 当 $y=2$ 时，$x_1=x_2=x_3=x_4=x_5=k$，k 可取任意值；

③ 当 $y=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ 时，可任意取 x_1、x_5 的值，则 $x_2=yx_1-x_5$，$x_3=-y(x_1+x_5)$，$x_4=yx_5-x_1$。

题 5 $\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}$

$$=\frac{2\cos\frac{\pi}{14}\left(\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}\right)}{2\cos\frac{\pi}{14}}$$

$$=\frac{2\cos\frac{\pi}{14}\cos\frac{\pi}{7}-2\cos\frac{\pi}{14}\cos\frac{2\pi}{7}+2\cos\frac{\pi}{14}\cos\frac{3\pi}{7}}{2\cos\frac{\pi}{14}}$$

$$=\frac{\left(\cos\frac{3\pi}{14}+\cos\frac{\pi}{14}\right)-\left(\cos\frac{5\pi}{14}+\cos\frac{3\pi}{14}\right)}{2\cos\frac{\pi}{14}}$$

$$+\frac{\left(\cos\frac{\pi}{2}+\cos\frac{5\pi}{14}\right)}{2\cos\frac{\pi}{14}}=\frac{\cos\frac{\pi}{14}}{2\cos\frac{\pi}{14}}=\frac{1}{2}.$$

题6 显然，如果在一对相邻名次的学生中，有一个的名次是正确的，那么另一个的名次也必定是正确的。分析乙猜想的名次顺序：D、A、E、C、B，有如下两方面的结论：

第一，他猜中的两对相邻名次的学生中，必定有一对的名次也是正确的。因为如若不然，被他猜中名次的两个学生中，至少有一个属于猜中相邻名次中的某一对，这一对的另一个学生的名次也将是正确的，这样乙至少要猜中三个学生的名次，与题给的条件不符。

第二，这一对猜中名次的学生只可能位于边缘(即第一、二名或第四、五名)。因为如若不然，即这一对名次位于中间(第二、三名或第三、四名)，那么另一对猜中的相邻名次只有唯一的可能(第四、五名或第一、二名)，从而另一对学生的名次也是正确的，这也与题给的条件不符。

因此，乙的猜想只有下列四种可能：

① $\underline{\overline{D}\,\overline{A}}\,\underline{EC}\,B$；② $\underline{\overline{D}\,\overline{A}}\,E\,\underline{CB}$；③ $\underline{DA}\,E\,\underline{\overline{C}\,\overline{B}}$；④ $D\,\underline{AE}\,\underline{\overline{C}\,\overline{B}}$.

(这里字母上面一划表示名次是正确的，字母下面一划表示相邻的名次是正确的。)

下面我们分别对这四种可能情况，对照甲的猜想予以检

查、分析，找出比赛的实际结果。

① $\underline{\bar{D}\bar{A}}\,\underline{EC}B$,$B$不可能在最后（否则成为乙全部猜中），而应在第三名，即只可能有$\underline{\bar{D}\bar{A}}B\underline{EC}$。但这时$A$、$B$两学生的名次是相邻的，与甲“没有猜中任何一对学生的名次是相邻的”不符，因此，这是不可能的；

② $\underline{\bar{D}\bar{A}}E\underline{CB}$，和①一样，$E$不可能在第三名，即只可能有$\underline{\bar{D}\bar{A}}\,\underline{CB}E$。而这时学生$C$为第三名，与甲“没有猜中任何一个学生的名次”不符，所以这也是不可能的；

③ $\underline{DA}E\underline{\bar{C}\bar{B}}$，同理$E$不可能在第三名，即只可能有$E\underline{DA}\,\underline{\bar{C}\bar{B}}$，与甲的猜想的名次顺序相对照，完全符合题给的条件，所以实际比赛的结果可能为$EDACB$；

④ $\underline{DAE}\bar{C}\bar{B}$，同理$D$不可能在第一名，即只可能$\underline{AE}D\underline{\bar{C}\bar{B}}$，这时学生$A$为第一名，也与甲“没有猜中任何一个学生的名次”不符，所以这也是不可能的。

综上所述，比赛的实际结果，五个学生的名次顺序为

E，D，A，C，B。

第　六　届

第六届国际数学奥林匹克于一九六四年六月三十日至七月十日在苏联举行，参加的国家有：保加利亚，匈牙利，德意志民主共和国，波兰，罗马尼亚，苏联，捷克斯洛伐克，南斯拉夫，蒙古。

竞　赛　题

题 1　（Ⅰ）求能使 2^n-1 被 7 整除的所有正整数 n；

（Ⅱ）证明：对于任意正整数 n，2^n+1 不能被 7 整除。

（捷克斯洛伐克，7 分）

题 2　设 a、b、c 为某一三角形三条边的长，求证：

$$a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c)\leqslant 3abc.$$

（匈牙利，7 分）

题 3　在边长为 a、b、c 的三角形 ABC 内作内切圆，并作此圆的三条切线，它们分别平行于已知三角形的三边。这三条切线与已知三角形相截，得三个三角形，再分别作这三个三角形的内切圆。求所作出的四个圆的面积之和。

（南斯拉夫，6 分）

题 4　有 17 位科学家，其中每一位和其他各位科学家都通信。在他们的通信中只谈及三个问题，而每一对科学家之间

通信只谈及一个问题。证明：至少有3位科学家，他们之间互相通信所谈的是同一个问题。

（匈牙利，6分）

题5 平面上有五个已知点，在连结这些点的直线中，任两条都不平行、都不垂直、都不重合。从每一点向其余四点两两连结所得的各直线作垂线，问这些垂线的交点（不包括已知的五点）最多有几个？

（罗马尼亚，7分）

题6 已知一个四面体 $ABCD$，连结顶点 D 与底面 ΔABC 的重心 D_1，过 ΔABC 的各顶点作 DD_1 的平行线，分别与对面相交于 A_1、B_1、C_1 点。证明：四面体 $ABCD$ 体积的三倍等于四面体 $A_1B_1C_1D_1$ 的体积。如果点 D_1 是 ΔABC 内的任一点，结论是否成立？

（波兰，9分）

题解

题1 （I）如果 n 是3的倍数，设 $n=3k$（k 是正整数），有

$$2^n-1=2^{3k}-1=8^k-1$$
$$=(8-1)(8^{k-1}+8^{k-2}+\cdots+1)$$

能被7整除。

如果 n 不是3的倍数，则有两种可能：$n=3k+1$ 或 $n=3k+2$（k 为非负整数）。

当 $n=3k+1$ 时，

$$2^n-1=2^{3k+1}-1=2\cdot2^{3k}-1$$
$$=2\cdot8^k-1=2\cdot(7+1)^k-1,$$

由于$(7+1)^k$被7除的余数为1，所以$2\cdot(7+1)^k$被7除的余数为2，$2\cdot(7+1)^k-1$被7除的余数为1。这就是说，当$n=3k+1$时，2^n-1不能被7整除。

当$n=3k+2$时，

$$2^n-1=2^{3k+2}-1=4\cdot8^k-1=4(7+1)^k-1,$$

同理可得，它被7除的余数为3，因此这时2^n-1也不能被7整除。

由此可见，当且仅当n是3的整数倍时，2^n-1能被7整除。

(Ⅱ) 由(Ⅰ)可知，当$n=3k,n=3k+1,n=3k+2$时，2^n被7除的余数分别为1，2，4，所以2^n+1被7除的余数分别为2，3，5。由此可见，不论n是怎样的正整数，2^n+1总不能被7整除。

题2 对于任意实数a、b、c，有

$$(a-b)^2\geqslant0,\ (b-c)^2\geqslant0,\ (c-a)^2\geqslant0.$$

又因a、b、c是某一三角形三边之长，所以有

$$b+c-a>0,\ c+a-b>0,\ a+b-c>0.$$

从而可得

$$(b-c)^2(b+c-a)\geqslant0,\ (c-a)^2(c+a-b)\geqslant0,$$
$$(a-b)^2(a+b-c)\geqslant0.$$

将这三个不等式两边分别相加，得

$$(b-c)^2(b+c-a)+(c-a)^2(c+a-b)+(a-b)^2(a+b-c)\geqslant0,$$

即

$$6abc-2a^2(b+c-a)-2b^2(a+c-b)-2c^2(a+b-c)\geqslant0,$$

得

$$a^2(b+c-a)+b^2(a+c-b)+c^2(a+b-c)\leqslant3abc.$$

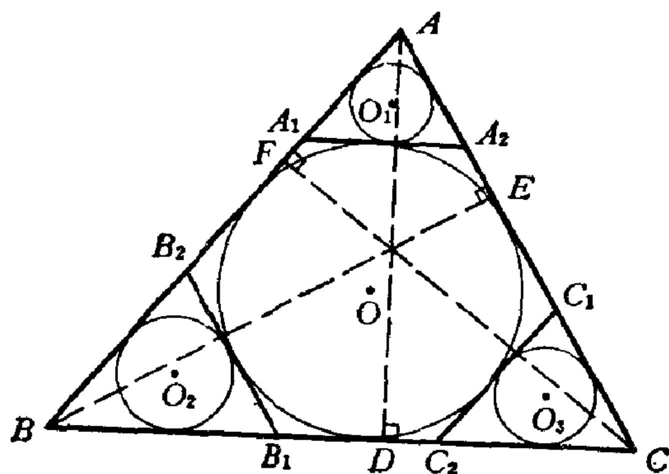


图 6-1

题 3 如图 6-1，$\odot O$ 是 ΔABC 的内切圆，A_1A_2、B_1B_2、C_1C_2 是 $\odot O$ 的三条切线，$A_1A_2 \parallel BC$，$B_1B_2 \parallel CA$，$C_1C_2 \parallel AB$，它们与 ΔABC 截得三个新三角形：ΔAA_1A_2、ΔBB_1B_2、ΔCC_1C_2，其内切圆分别为 $\odot O_1$、$\odot O_2$、$\odot O_3$。设 $\odot O$ 及 $\odot O_1$、$\odot O_2$、$\odot O_3$ 的半径分别为 r、r_1、r_2、r_3。

ΔABC 的内切圆 $\odot O$ 的面积为

$$S=\pi r^2, \qquad r=\frac{S_{\Delta ABC}}{p},$$

其中 $p=\dfrac{a+b+c}{2}$，　$S_{\Delta ABC}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$。

由于 ΔAA_1A_2、ΔBB_1B_2、ΔCC_1C_2 与 ΔABC 位似，所以它们的内切圆 $\odot O_1$、$\odot O_2$、$\odot O_3$ 位似于 ΔABC 的内切圆 $\odot O$，于是有

$$\frac{r_1}{r}=\frac{h_1}{h_a}, \qquad \frac{r_2}{r}=\frac{h_2}{h_b}, \qquad \frac{r_3}{r}=\frac{h_3}{h_c}.$$

其中 h_a、h_b、h_c 分别是 ΔABC 各边上的高，h_1、h_2、h_3 分别是

ΔAA_1A_2、ΔBB_1B_2、ΔCC_1C_2 中分别与h_a、h_b、h_c平行的高。

平行线 A_1A_2 与 BC、B_1B_2 与 CA、C_1C_2 与 AB 之间的距离都等于 $2r$，故有

$$h_1 = h_a - 2r,\ h_2 = h_b - 2r,\ h_3 = h_c - 2r;$$

而 $$h_a = \frac{2S_{\triangle ABC}}{a},\ h_b = \frac{2S_{\triangle ABC}}{b},\ h_c = \frac{2S_{\triangle ABC}}{c}.$$

∴ $$\frac{r_1}{r} = \frac{h_a - 2r}{h_a} = 1 - \frac{2r}{h_a},$$

$$r_1 = r - \frac{2r^2}{h_a} = \frac{S_{\triangle ABC}}{p} - \frac{2aS^2_{\triangle ABC}}{2p^2S_{\triangle ABC}}$$

$$= \frac{S_{\triangle ABC}\cdot(p-a)}{p^2}.$$

同理可得

$$r_2 = \frac{S_{\triangle ABC}\cdot(p-b)}{p^2},\ r_3 = \frac{S_{\triangle ABC}\cdot(p-c)}{p^2}.$$

因此，四个内切圆的面积之和为：

$$S + S_1 + S_2 + S_3 = \pi r^2 + \pi r_1^2 + \pi r_2^2 + \pi r_3^2$$

$$= \pi\left[\frac{S^2_{\triangle ABC}}{p^2} + \frac{S^2_{\triangle ABC}\cdot(p-a)^2}{p^4} + \frac{S^2_{\triangle ABC}\cdot(p-b)^2}{p^4} + \frac{S^2_{\triangle ABC}\cdot(p-c)^2}{p^4}\right]$$

$$= \frac{\pi S^2_{\triangle ABC}}{p^4}\left[p^2 + (p-a)^2 + (p-b)^2 + (p-c)^2\right]$$

$$= \frac{\pi\cdot p(p-a)(p-b)(p-c)}{p^4}\cdot(p^2 + p^2 - 2ap + a^2 + p^2 - 2bp + b^2 + p^2 - 2cp + c^2)$$

$$=\frac{\pi(p-a)(p-b)(p-c)}{p^3}\cdot(4p^2-4p^2+a^2+b^2+c^2)$$

$$=\frac{\pi(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)(a^2+b^2+c^2)}{(a+b+c)^3}.$$

题 4　先考察某一位科学家，用 a 表示，他与其余 16 位科学家通信，由于总共只谈及三个问题，所以可以断定他至少要与其中 6 位科学家通信中谈的是同一个问题．这是因为：如若不然，即与 a 通信谈任何一问题的科学家至多只有 5 位，那么谈三个问题科学家 a 至多只可能与 15 位科学家通信，这与假设矛盾．不妨设 a 与 6 位科学家 b_1、b_2、b_3、b_4、b_5、b_6 通信，谈及的是同一个问题 A．

这时，在这 6 位科学家 $b_i(i=1,2,\cdots,6)$ 之间相互通信，有下列两种可能：

① 如果其中至少有 2 位，不妨设为 b_1、b_2，他们之间通信也谈及这个问题 A，这样，a、b_1、b_2 这 3 位科学家之间互相通信所谈及的是同一个问题 A，结论成立；

② 如果其中任 2 位科学家之间通信都不谈及问题 A，即这 6 位科学家之间彼此通信只能谈其余的两个问题．与前面的讨论相仿，可考察其中的某一位，设为 b_1，他与其余 5 位科学家通信，由于只谈及两个问题，所以他至少要与其中的 3 位通信谈的是同一个问题，不妨设 b_1 与 c_1、c_2、c_3［$c_i(i=1,2,3)$ 是 $b_j(j=2,3,\cdots,6)$ 中的三个］通信谈的是同一个问题 B（B 不同于 A）．这时，再考察 c_1、c_2、c_3 之间相互通信，又有如下两种可能：

① 如果 c_1、c_2、c_3 中至少有 2 位，不妨设为 c_1、c_2，他们之间通信也谈及问题 B，这样，b_1、c_1、c_2 这 3 位科学家之间

互相通信所谈及的是同一个问题B，结论成立；

② 如果c_1、c_2、c_3中任意2位之间通信都不谈及问题B，并且已知他们通信也不谈及A，于是这3位科学家通信只能谈第三个问题C，这样，c_1、c_2、c_3 3位科学家互相通信所谈及的是同一个问题C，结论成立。

由此可见，不管什么情况，我们都能找到互相通信谈同一个问题的3位科学家，命题得证。

题5 从某一已知点向其余四点两两连结所得的直线作垂线，由于四点中每两点连线有$C_4^2=6$(条)，所以从某一已知点向这些直线作垂线共有6条，五个点总共可作$5\times6=30$条垂线。

这30条垂线，如果两两相交于不同的点，则"交点"的个数有

$$C_{30}^2=435\ (个).$$

但是，这些垂线中有些是不相交(平行)的，有些是相交于同一点甚至交于已知点的，对于这些情况应从上面的"个数"中除去。

对于连结任意两点的一条直线，其余三点向这条直线所作的三条垂线互相平行，它们两两的交点不存在，所以对每条这样的直线，上面多计入的"交点"有$C_3^2=3$(个)，而这样的直线有$C_5^2=10$(条)，所以总共应除去这样的"交点"

$$10\times3=30\ (个);$$

五个已知点中任意三点组成一个三角形，从这三点中任意一点向其他两点连线所作的三条垂线是这个三角形的三条高，它们实际上只交于一点，所以对每一个三角形多计入了$(C_3^2-1)=3-1=2$(个)"交点"，而这样的三角形有$C_5^3=10$(个)，所以总共应除去这样的"交点"

$$2\times 10=20\ (\text{个});$$

从五个已知点中的任意一点作其余四点两两连线的垂线有 $C_4^2=6$ 条，这六条垂线都相交于这个已知点，所以对每一个已知点来说，上面多计算的"交点"有 $C_6^2=15$(个)，五个已知点总共应除去这样的"交点"(重合于已知点)

$$5\times 15=75\ (\text{个}).$$

由此可得，符合题设要求的这些垂线的交点，最多有

$$435-30-20-75=310\ (\text{个}).$$

题6 证法一　设 D_1 是 ΔABC 的重心，连结 BD_1 并延长交 AC 于 E(图 6-2)，则点 E 是 AC 的中点，且

$$BE:D_1E=3:1.$$

过 E、D_1、D 三点作一个平面. 因为点 B 在 ED_1 上，所以它在平面 ED_1D 上. 又因 $BB_1\parallel DD_1$，所以 BB_1 在平面 ED_1D 上.

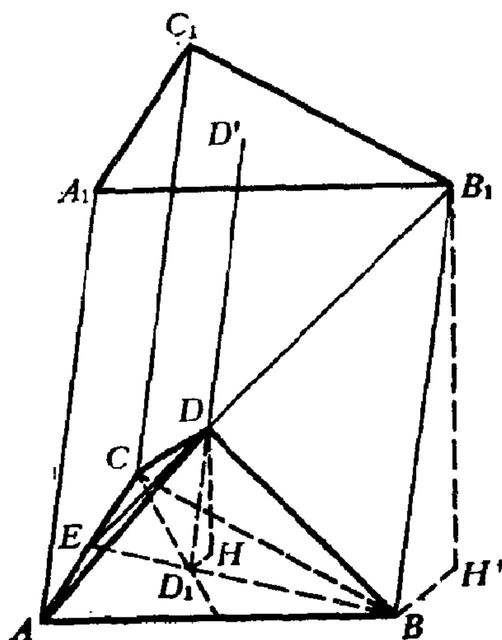


图 6-2

在平面 ED_1D 上，直线 BB_1 与直线 ED 必定相交，其交点也就是 BB_1 与平面 ADC 的交点 B_1. 这就是说，E、D、B_1 三点在一直线上.

在 ΔEBB_1 中，由 $BB_1\parallel D_1D$ 可得

$$BB_1:D_1D=BE:D_1E=3:1,$$

即　$$BB_1=3D_1D.$$

同理可得

$$AA_1=3D_1D;\ CC_1=3D_1D,$$

故 $$AA_1=BB_1=CC_1=3D_1D.$$

又因 $AA_1 /\!/ BB_1 /\!/ CC_1 /\!/ D_1D$，所以四边形 A_1ABB_1、A_1ACC_1、B_1BCC_1 都是平行四边形，从而平面 $A_1B_1C_1 /\!/$ 平面 ABC，并且

$$A_1B_1=AB,\ B_1C_1=BC,\ C_1A_1=CA,$$

$$\therefore\quad \triangle A_1B_1C_1 \cong \triangle ABC. \qquad (1)$$

从D点作 $DH\perp$平面 ABC，垂足为H；从 B_1 点作 $BH'\perp$平面 ABC，垂足为 H'. 有

$$\angle BH'B_1=\angle D_1HD=90°,$$

$$\angle BB_1H'=\angle D_1DH（因为\ BB_1 /\!/ D_1D,\ B_1H' /\!/ DH）,$$

$$\therefore\quad \triangle BH'B_1 \backsim \triangle D_1HD,$$

$$\therefore\quad B_1H':DH=BB_1:D_1D=3:1,$$

即 $$B_1H'=3DH. \qquad (2)$$

由(1)、(2)即得

$$V_{A_1B_1C_1D_1}=3V_{ABCD}.$$

如果点 D_1 是 $\triangle ABC$ 内的任意一点，上述结论仍然是成立的。证明如下(图 6-3)：

在平面 ABC 上，连结 AD_1 交 BC 于 A'，连结 CD_1 交 AB 于 C'。

过 A'、D_1、D 三点作一个平面，因为A在 $A'D_1$ 上，且 $AA_1 /\!/ D_1D$，所以 AA_1 在平面 $A'D_1D$ 上，直线 AA_1 与 $A'D$ 必定相交，其交点也就是直线 AA_1 与平面 BCD 的交点 A_1，即 A'、D、A_1 三点在一直线上。

过 C、D_1、D 三点作一个平面．因为点 C' 在 CD_1 上，且 C' 在 AB 上，所以平面 CD_1D 与平面 ABA_1 必交于过 C' 点的一条直线 $C'P$，设直线 CD 与这条交线 $C'P$ 相交于点 P．又由 $D_1D /\!/ AA_1$ 可得 $DD_1 /\!/$ 平面 ABA_1，从而 $C'P /\!/ D_1D$．

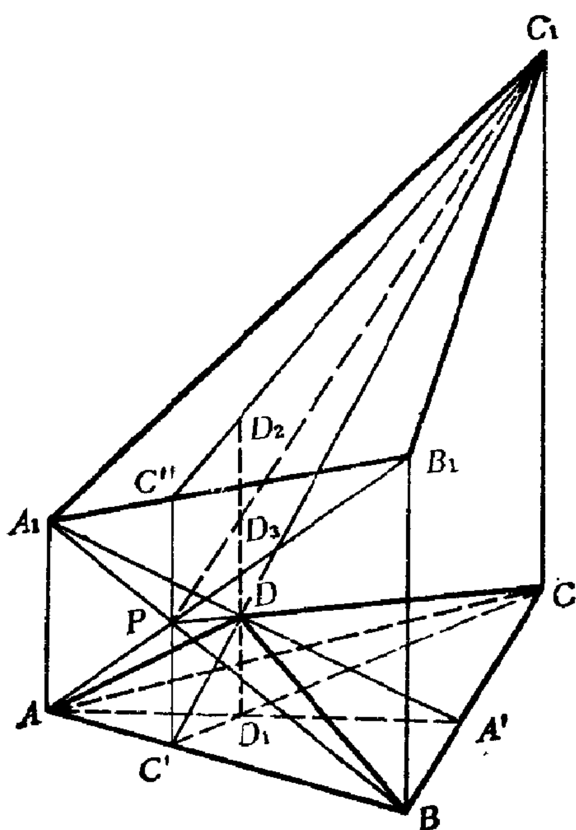


图 6-3

因为 $BB_1 /\!/ AA_1 /\!/ D_1D$，所以 BB_1 在平面 ABA_1 上，直线 BB_1 与 AP 必相交．由于 AP 在平面 ACD 上，所以直线 BB_1 与 AP 的交点，也就是 BB_1 与平面 ACD 的交点 B_1，即 A、P、B_1 三点在一直线上．

同理可证：C'、D、C_1 三点共线；A_1、P、B 三点共线．

因为 $AA_1 /\!/ BB_1$，它们都在平面 ABA_1 上，$C'P$ 与 A_1B_1 相交，设交点为 C''．四边形 A_1ABB_1 是梯形，P 点是梯形对角线的交点，且 $C'C'' /\!/ AA_1 /\!/ BB_1$（都平行于 D_1D），所以 $C'P = PC''$．

因为 $C'C'' /\!/ D_1D /\!/ CC_1$，它们都在平面 CD_1D 上，设 $C''C_1$ 与直线 D_1D 相交于点 D_2，PC_1 与 D_1D 相交于点 D_3．

在梯形 $C''C'CC_1$ 中，$D_1D_2 /\!/ C'C'' /\!/ C_1C$，$C'P=PC''$，$D$、$D_3$ 分别是 PC、PC_1 与 D_1D_2 的交点，点 D 还是梯形 $PC'CC_1$ 对角线的交点，所以有

$$D_1D=DD_3=D_3D_2,$$

即有 $$D_1D_2=3D_1D,$$

从而不难证明 $V_{ABCD_2}=3V_{ABCD}$。

又因 $AA_1 /\!/ BB_1 /\!/ D_1D_2$，所以四面体 $A_1B_1D_2D_1$ 与四面体 ABD_1D_2 有相等的底面积：

$$S_{\Delta A_1D_1D_2}=S_{\Delta AD_2D_1}$$

与相等的高（都等于直线 BB_1 和平面 $AD_1D_2A_1$ 间的距离），因此它们的体积相等，即

$$V_{A_1B_1D_2D_1}=V_{ABD_1D_2}.$$

同理可得：

$$V_{B_1C_1D_2D_1}=V_{BCD_1D_2},\quad V_{C_1A_1D_2D_1}=V_{CAD_1D_2}.$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad V_{A_1B_1C_1D_1}&=V_{A_1B_1D_2D_1}+V_{B_1C_1D_2D_1}+V_{C_1A_1D_2D_1}\\&=V_{ABD_1D_2}+V_{BCD_1D_2}+V_{CAD_1D_2}\\&=V_{ABCD_2}=3V_{ABCD}.\end{aligned}$$

证法二　我们也可以利用物理学上质点重心的有关知识来证明本题的结论。现就一般情况证明如下：

设 D_1 是 ΔABC 内的任一点，在底面 ΔABC 内，连结 AD_1、BD_1、CD_1，并分别延长与对边相交于 A'、B'、C'（图6-4）。如前所证，必有 A'、D、A_1 三点共线（在一直线上），B'、D、B_1 三点共线，C'、D、C_1 三点共线。

在 A、B、C 三点分别放置适当的质量 x、y、z，使 A、B、C 三质点的重心为点 D_1。这时，点 C' 可看作点 A（质量 x）与点 B（质量 y）的重心，点 A' 可看作点 B（质量 y）与点 C（质量

z)的重心，点 B' 可看作点 C（质量 z）与点 A（质量 x）的重心。而点 D_1 既可以看成是点 A（质量 x）与 A'（质量 $y+z$）的重心，也可以看成是点 B（质量 y）与 B'（质量 $z+x$）的重心，还可以看成是点 C（质量 z）与 C'（质量 $x+y$）的重心。由重心的性质，应有

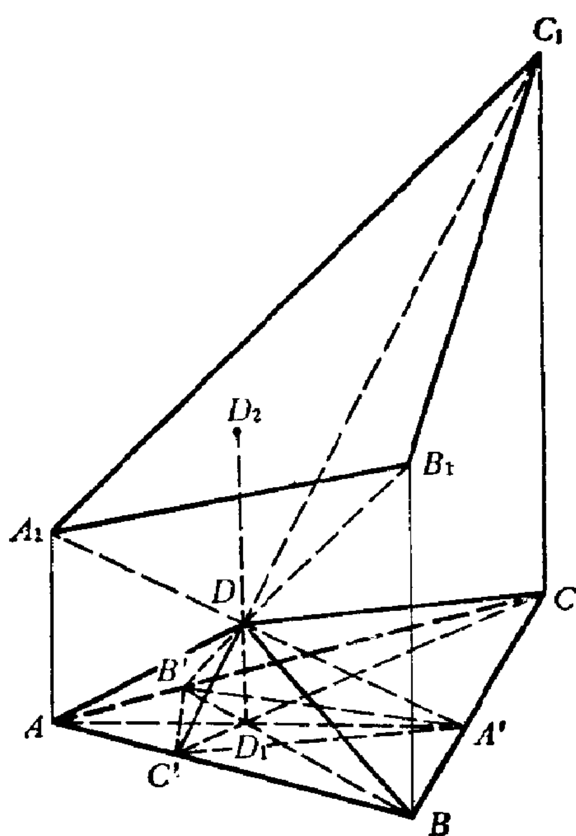


图 6-4

$$\frac{AB'}{B'C}=\frac{z}{x};$$

$$\frac{CA'}{A'B}=\frac{y}{z};$$

$$\frac{BC'}{C'A}=\frac{x}{y}.$$

我们可取 $x=B'C, z=AB', y=\frac{CA'}{A'B}\cdot AB'$，便能满足要求。

$$\because\quad \frac{S_{\Delta AB'C'}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{AB'\cdot AC'}{AB\cdot AC}=\frac{AB'}{AC}\cdot\frac{AC'}{AB},$$

而 $$\frac{AB'}{AC}=\frac{AB'}{AB'+B'C}=\frac{z}{x+z},$$

$$\frac{AC'}{AB}=\frac{AC'}{AC'+C'B}=\frac{y}{x+y},$$

$$\therefore\quad \frac{S_{\Delta AB'C'}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{yz}{(x+y)(x+z)}.$$

同理可得，

$$\frac{S_{\Delta BC'A'}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{zx}{(y+z)(y+x)},$$

$$\frac{S_{\Delta CA'B'}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{xy}{(z+x)(z+y)}.$$

因此，

$$\frac{S_{\Delta A'B'C'}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{S_{\Delta ABC}-S_{\Delta AB'C'}-S_{\Delta BC'A'}-S_{\Delta CA'B'}}{S_{\Delta ABC}}$$

$$=1-\frac{yz}{(x+y)(x+z)}-\frac{zx}{(y+z)(y+x)}$$

$$-\frac{xy}{(z+x)(z+y)}=\frac{2xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)}.$$

由于四面体 $A'B'C'D$ 与四面体 $ABCD$ 有相同的高，所以它们的体积之比等于底面积之比，即有

$$\frac{V_{A'B'C'D}}{V_{ABCD}}=\frac{S_{\Delta A'B'C'}}{S_{\Delta ABC}}=$$

$$=\frac{2xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)} \tag{1}$$

又 $$\frac{A'D}{DA_1}=\frac{A'D_1}{D_1A}=\frac{x}{y+z},$$

同理 $$\frac{B'D}{DB_1}=\frac{y}{z+x},\quad \frac{C'D}{DC_1}=\frac{z}{x+y}.$$

由于三面角 $D\text{-}A'B'C'$ 与三面角 $D\text{-}A_1B_1C_1$ 全等，所以四面体 $A'B'C'D$ 与四面体 $A_1B_1C_1D$ 的体积之比等于对应的三条侧棱乘积之比，即有

$$\frac{V_{A'B'C'D}}{V_{A_1B_1C_1D}}=\frac{DA'\cdot DB'\cdot DC'}{DA_1\cdot DB_1\cdot DC_1}$$

$$=\frac{xyz}{(x+y)(y+z)(x+z)} \tag{2}$$

由(1)、(2)可得

$$V_{A_1B_1C_1D}=2V_{ABCD}. \tag{3}$$

为证明本题结论($V_{A_1B_1C_1D_1}=3V_{ABCD}$)，我们进一步来证明 $V_{A_1B_1C_1D_1}=\frac{3}{2}V_{A_1B_1C_1D}$.在 $\triangle A'B'C'$ 的三顶点 A'、B'、C' 分别放置质量 $\frac{y+z}{2}$，$\frac{z+x}{2}$，$\frac{x+y}{2}$，这时 A'、B'、C' 三质点的重心也就在 D_1 点。再在点 A_1、B_1、C_1 三点分别放置适当的质量，使点D恰为各对质点 A_1 与 A'、B_1与 B'、C_1 与 C' 的重心。因为

$$\frac{A_1D}{DA'}=\frac{y+z}{x},\quad \frac{B_1D}{DB'}=\frac{z+x}{y},$$

$$\frac{C_1D}{DC'}=\frac{x+y}{z},$$

所以 A_1、B_1、C_1 三点放置的质量应分别取 $\frac{x}{2}$、$\frac{y}{2}$，$\frac{z}{2}$.

这样，点D是点 $A'\left(质量\frac{y+z}{2}\right)$与 $A_1\left(质量\frac{x}{2}\right)$的重心，也是点 $B'\left(质量\frac{z+x}{2}\right)$与 $B_1\left(质量\frac{y}{2}\right)$ 的重心，还是点 C_1

$\left(质量\frac{x+y}{2}\right)$与$C_1\left(质量\frac{z}{2}\right)$的重心．设$A_1$、$B_1$、$C_1$三点的重心为$D_2$，它显然在平面$A_1B_1C_1$上．而$D_1$是$A'$、$B'$、$C'$三点的重心，所以点$D$可以看作是$D_1$与$D_2$两质点的重心，点$D_2$在直线$D_1D$上，并且这时在$D_1$点相当于集中了点$A'$、$B'$、$C'$的总质量$x+y+z$，在$D_2$点相当于集中了点$A_1$、$B_1$、$C_1$的总质量$\frac{x+y+z}{2}$，因此，

$$\frac{D_1D}{DD_2}=\frac{x+y+z/2}{x+y+z}=\frac{1}{2},$$

$$\therefore\quad \frac{D_1D_2}{DD_2}=\frac{D_1D+DD_2}{DD_2}=\frac{3}{2}.$$

由此可知，从点D_1与D分别到平面$A_1B_1C_1$的距离之比等于$\frac{3}{2}$．

四面体$A_1B_1C_1D_1$与四面体$A_1B_1C_1D$具有同一底面$\Delta A_1B_1C_1$，而对应高之比为$\frac{3}{2}$，所以有

$$\frac{V_{A_1B_1C_1D_1}}{V_{A_1B_1C_1D}}=\frac{3}{2}. \tag{4}$$

由(3)、(4)即得

$$V_{A_1B_1C_1D_1}=3V_{ABCD}.$$

第　七　届

第七届国际数学奥林匹克于一九六五年七月三日至十三日在德意志民主共和国举行,参加的国家有:保加利亚,匈牙利,德意志民主共和国,蒙古,波兰,罗马尼亚,苏联,芬兰,捷克斯洛伐克,南斯拉夫。

竞　赛　题

题1　求在区间 $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ 内且满足如下不等式的全部实数 x:

$$2\cos x \leqslant \left|\sqrt{1+\sin 2x}-\sqrt{1-\sin 2x}\right| \leqslant \sqrt{2}.$$

（南斯拉夫，4 分）

题2　已知方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 0, \end{cases}$$

它的系数满足下列条件:

（1）a_{11}、a_{22}、a_{33} 都是正的;

（2）其余各系数都是负的;

（3）每一方程所有系数之和是正的。

证明: $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ 是这个方程组的唯一解。

（波兰， 6 分）

题3 四面体$ABCD$的棱AB、CD的长分别为a、b，直线AB、CD之间的距离等于d，它们之间的夹角为w。这个四面体被平行于AB、CD两棱的平面P分成两部分，已知AB到平面P的距离与CD到平面P的距离之比等于k，求四面体被分成这两部分的体积之比。

（捷克斯洛伐克， 8分）

题4 求四个实数x_1、x_2、x_3、x_4，使其中任何一个加上其余三数之积等于2．

（苏联， 6分）

题5 在ΔOAB中，已知$\angle AOB=\alpha(\alpha<90°)$，从$\Delta AOB$的任一点$M$（不与$O$点重合）作$MP\perp OA$，$MQ\perp OB$，垂足分别为$P$、$Q$，$H$是$\Delta OPQ$的垂心，分别求下列两种情况下$H$点的轨迹：

（Ⅰ）当动点M在线段AB上运动时；

（Ⅱ）当动点M在ΔAOB的内部运动时。

（罗马尼亚， 7分）

题6 在平面上有n个已知点（$n\geqslant3$），d是其中每两点之间的距离的最大值，距离等于d的两点所成的线段叫做这n个点所组成的点集的直径。求证：这个点集的直径不多于n条。 （波兰， 9分）

题　　解

题1 原不等式可以改写为

$$\begin{cases}2\cos x\leqslant\left|\sqrt{1+\sin2x}-\sqrt{1-\sin2x}\right| & (1)\\ \left|\sqrt{1+\sin2x}-\sqrt{1-\sin2x}\right|\leqslant\sqrt{2} & (2)\end{cases}$$

先解不等式(1)．因为不等式(1)的右边总是非负数，所以如果 $\cos x\leqslant 0$，即

$$\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{3\pi}{2} \tag{3}$$

不等式(1)总是成立的；

如果 $\cos x>0$，将不等式(1)两边平方，得

$$4\cos^2 x\leqslant 2-2\sqrt{\cos^2 2x},$$

$$\sqrt{\cos^2 2x}\leqslant 1-2\cos^2 x,$$

$$|\cos 2x|\leqslant-\cos 2x,$$

$\therefore$ $\cos 2x\leqslant 0$。

$\therefore$ $\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 2x\leqslant\dfrac{3\pi}{2}+2k\pi,$

$\therefore$ $\dfrac{\pi}{4}+k\pi\leqslant x\leqslant\dfrac{3\pi}{4}+k\pi\ (k=0,1)$。

于是，当 $\cos x>0$ 时能使不等式(1)成立的 x 值为：

$$\frac{\pi}{4}\leqslant x<\frac{\pi}{2},\quad \frac{3\pi}{2}<x\leqslant\frac{7\pi}{4}. \tag{4}$$

综合(3)、(4)得不等式(1)的解为

$$\frac{\pi}{4}\leqslant x\leqslant\frac{7\pi}{4}.$$

再考虑不等式(2)．它的两边都是非负数，分别平方，得

$$2-2\sqrt{\cos^2 2x}\leqslant 2,$$

$$-2\sqrt{\cos^2 2x}\leqslant 0,$$

它对任意实数 x 都是成立的。

因此，原不等式的解为：

$$\frac{\pi}{4}\leqslant x\leqslant\frac{7\pi}{4}.$$

题2 用反证法．如果有不全为零的解：$x_1=k_1$，$x_2=k_2$，$x_3=k_3$．则$|k_1|$、$|k_2|$、$|k_3|$中必有最大者，不失一般性，不妨设

$$max.\{|k_1|、|k_2|、|k_3|\}=|k_1|，且\ k_1\neq 0.$$

因 $$a_{11}k_1+a_{12}k_2+a_{13}k_3=0,$$

所以 $$a_{11}=-\frac{k_2}{k_1}a_{12}-\frac{k_3}{k_1}a_{13}.$$

从而有 $$\left|a_{11}\right|=\left|-\frac{k_2}{k_1}a_{12}-\frac{k_3}{k_1}a_{13}\right|$$

$$\leqslant\left|\frac{k_2}{k_1}\right|\cdot\left|a_{12}\right|+\left|\frac{k_3}{k_1}\right|\cdot\left|a_{13}\right|$$

$$\leqslant\left|a_{12}\right|+\left|a_{13}\right|.$$

由条件(1)、(2) $a_{11}>0$，$a_{12}<0$，$a_{13}<0$．

所以 $$a_{11}+a_{12}+a_{13}\leqslant 0.$$

这与条件(3)矛盾．因此方程组有唯一解$x_1=x_2=x_3=0$．

题3 设平面P与CD之间的距离为d_1，与AB之间的距离为d_2．由题设，$d_1+d_2=d$，且$d_2:d_1=k$，得

$$d_1=\frac{d}{k+1},\qquad d_2=\frac{kd}{k+1}.$$

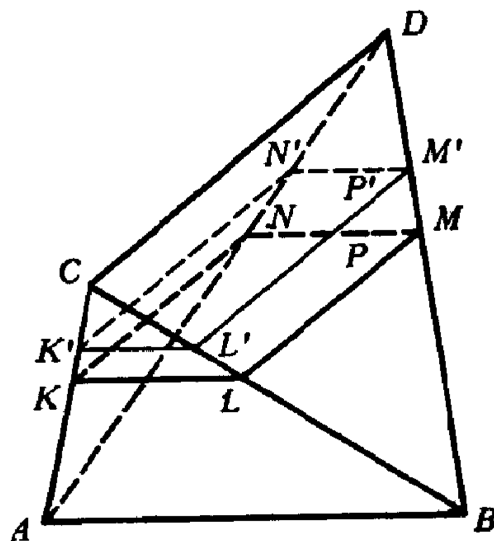


图 7-1

任意作一个平行于P的平面P'，与四面体$ABCD$相截得四边形$K'L'M'N'$（图7-1）．因为 $K'L'\parallel AB\parallel N'M'$，$L'M'\parallel CD\parallel K'N'$，所以四

边形 $K'L'M'N'$ 是平行四边形。设平面 P' 与 CD 的距离为 x，则 $\square K'L'M'N'$ 的面积为

$$S=K'L'\cdot K'N'\cdot \sin w=\frac{ax}{d}\cdot\frac{b(d-x)}{d}\cdot\sin w.$$

于是被平面 P 截得的两部分之一（图中上半部分）的体积为

$$V_1=\int_0^{d_1}\frac{ax}{d}\cdot\frac{b(d-x)}{d}\sin w\,dx$$

$$=\left(\frac{abd_1^2}{2d}-\frac{abd_1^3}{3d^2}\right)\sin w;$$

同样可以求得另一部分的体积为

$$V_2=\left(\frac{abd_2^2}{2d}-\frac{abd_2^3}{3d^2}\right)\sin w.$$

$$\therefore\quad \frac{V_2}{V_1}=\frac{3dd_2^2-2d_2^3}{3dd_1^2-2d_1^3}=\left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2\cdot\frac{3d-2d_2}{3d-2d_1}$$

$$=k^2\cdot\frac{3d-\dfrac{2kd}{k+1}}{3d-\dfrac{2d}{k+1}}=k^2\cdot\frac{k+3}{3k+1}.$$

即四面体被平面 P 所分成的两部分体积之比为：

$$\frac{V_2}{V_1}=k^2\cdot\frac{k+3}{3k+1}.$$

题4　由题意，x_1、x_2、x_3、x_4 满足如下方程组：

$$\begin{cases}x_1+x_2x_3x_4=2 & (1)\\ x_2+x_1x_3x_4=2 & (2)\\ x_3+x_1x_2x_4=2 & (3)\\ x_4+x_1x_2x_3=2. & (4)\end{cases}$$

首先，我们证明$x_i \neq 0 (i=1, 2, 3, 4)$；否则，例如设$x_1=0$时，则由(2)、(3)、(4)，得$x_2=x_3=x_4=2$，不满足(1)。故$x_i \neq 0$。

其次，由(1)，$x_3x_4=\dfrac{2-x_1}{x_2}$，

由(2)，$x_3x_4=\dfrac{2-x_2}{x_1}$，

从而得 $\dfrac{2-x_1}{x_2}=\dfrac{2-x_2}{x_1}$，

$$2x_1-x_1^2=2x_2-x_2^2,$$

$$(x_1-1)^2=(x_2-1)^2.$$

即 $$|x_1-1|=|x_2-1|.$$

将未知数x_1、x_2、x_3、x_4进行轮换，可得

$$|x_1-1|=|x_2-1|=|x_3-1|=|x_4-1|. \qquad (5)$$

就x_i的取值可分下列五种情况：

① 四个$x_i \geqslant 1$ $(i=1,2,3,4)$，

由(5)可知，$x_1=x_2=x_3=x_4$，

由(1)，得 $x_1+x_1^3=2$，

$$x_1^3+x_1-2=0,$$

即 $$(x_1-1)(x_1^2+x_1+2)=0,$$

由于 $x_1^2+x_1+2=0$ 的判别式 $\Delta=1^2-8=-7<0$，故$x_1^2+x_1+2=0$无实数解。

只有$x_1=1$， $\therefore$ $x_1=x_2=x_3=x_4=1$。

② 只有三个$x_i \geqslant 1 (i=2,3,4)$，

则$x_1<1$，由(5)可得

$$-x_1+1=x_2-1=x_3-1=x_4-1$$

$\therefore \quad x_2 = x_3 = x_4,\ x_1 = 2 - x_2.$

由(1)得 $2 - x_2 + x_2^3 = 2,$

$$x_2(x_2^2 - 1) = 0,$$

$\because \quad x_2 \geqslant 1,$

$\therefore \quad x_2 = 1,\ x_1 = 2 - x_2 = 1.$

这与 $x_1 < 1$ 矛盾，即这时方程组无解。

③ 只有二个 $x_i \geqslant 1 (i = 3, 4)$，

则 $x_1 < 1$，$x_2 < 1$。

由(5)得 $-x_1 + 1 = -x_2 + 1 = x_3 - 1 = x_4 - 1.$

$\therefore \quad x_1 = x_2,\ x_3 = x_4 = 2 - x_1.$

由(3)得 $2 - x_1 + x_1^2(2 - x_1) = 2,$

即 $x_1(x_1 - 1)^2 = 0.$

$\because \quad x_1 \neq 0,$

$\therefore \quad x_1 = 1$，这与 $x_1 < 1$ 矛盾．即这时方程组无解。

④ 只有一个 $x_i \geqslant 1$，例如 $x_4 \geqslant 1$，其余 $x_i < 1 (i = 1, 2, 3)$

由(5)得 $-x_1 + 1 = -x_2 + 1 = -x_3 + 1 = x_4 - 1,$

$\therefore \quad x_1 = x_2 = x_3,\ x_4 = 2 - x_1.$

由(4)得 $2 - x_1 + x_1^3 = 2,$

即 $x_1(x_1^2 - 1) = 0.$

由于 $x_1 < 1$，且 $x_1 \neq 0$，$\therefore x_1 = -1,$

从而得 $x_1 = x_2 = x_3 = -1, x_4 = 2 - x_1 = 3.$

满足方程组。

轮换 x_1、x_2、x_3、x_4，得

$(3, -1, -1, -1), (-1, 3, -1, -1), (-1, -1, 3, -1)$

也是原方程组的解。

⑤ 四个 $x_i < 1 (i = 1, 2, 3, 4)$，

由(5)得　$x_1=x_2=x_3=x_4$,

类似于情形①,可得 $x_1=1$,这与 $x_1<1$ 矛盾. 这时即方程组无解.

综上所述，所求实数为:

$$x_1=x_2=x_3=x_4=1;$$

$$x_1=x_2=x_3=-1,\ x_4=3;$$

$$x_2=x_3=x_4=-1,\ x_1=3;$$

$$x_3=x_4=x_1=-1,\ x_2=3;$$

$$x_4=x_1=x_2=-1,\ x_3=3.$$

题5　不妨先就 ΔOAB 是锐角三角形的情形予以讨论.

(I) 如图7-2，设 $AH_1\perp OB$，$BH_2\perp OA$，垂足分别为 H_1、H_2,则线段 H_1H_2 就是所求的轨迹.证明如下:

设M是 AB 上的任一点，$MP\perp OA$，$MQ\perp OB$，$QQ_1\perp OA$,$PP_1\perp OB$,垂足分别为 P、Q、Q_1、P_1，则 P_1P 与 Q_1Q 的交点H就是 ΔOPQ 的垂心. 并设 QQ_1 与 H_1H_2 相交于K点. 要证明H点在 H_1H_2 上，只要证明点H与点K重合就可以了.

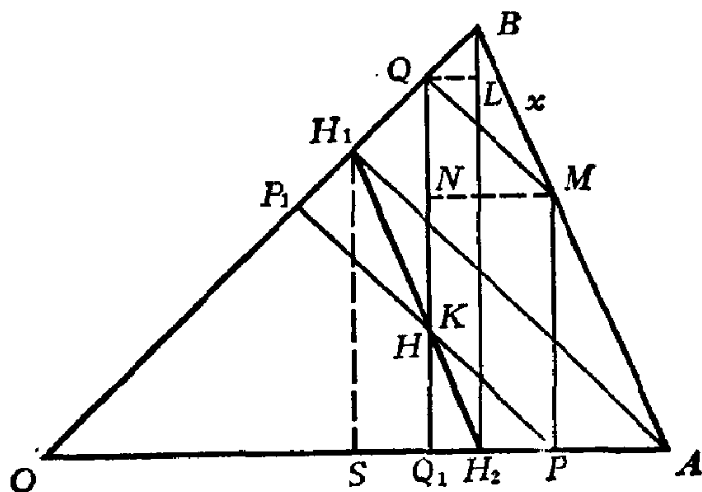


图 7-2

由题设 $\angle AOB=\alpha$，并令 $\angle OBA=\beta$ (α、$\beta<90°$)。

$\because$ $\angle BH_2A=\angle AH_1B=90°$，

$\therefore$ H_2、A、B、H_1 四点共圆，

$\therefore$ $\angle H_1H_2O=\angle OBA=\beta$。

设 $BM=x$，则 $BQ=x\cos\beta$，$QM=x\sin\beta$。

作 $QL/\!/OA$，交 BH_2 于点 L，则四边形 QQ_1H_2L 是矩形，$\angle LQB=\angle AOB=\alpha$。

因为点K是 QQ_1 与 H_1H_2 的交点，所以在 ΔKQ_1H_2 中，有

$$Q_1H_2=QL=BQ\cdot\cos\alpha=x\cos\beta\cos\alpha,$$

$$Q_1K=Q_1H_2\cdot\mathrm{tg}\angle H_1H_2O=x\cos\beta\cos\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta$$

$$=x\cos\alpha\sin\beta。\qquad(1)$$

作 $MN/\!/AO$，交 Q_1Q 于点N，则 MNQ_1P 是矩形，且 $\angle NQM=\angle AOB=\alpha$。

因为点H是 P_1P 与 Q_1Q 的交点，所以在 ΔHQ_1P 中，有

$$Q_1P=NM=QM\cdot\sin\alpha=x\sin\beta\sin\alpha,$$

又因 $\angle Q_1HP=\angle AOB=\alpha$，得

$$Q_1H=Q_1P\cdot\mathrm{ctg}\angle Q_1HP$$

$$=x\sin\beta\sin\alpha\cdot\mathrm{ctg}\alpha=x\cos\alpha\sin\beta。\qquad(2)$$

由(1)、(2)两式，得

$$Q_1H=Q_1K,$$

且Q_1H 与Q_1K 均在线段 Q_1Q 上，所以点H与K重合，因此符合条件的点H在线段 H_1H_2 上。

当动点M在 BA 上从 B 连续运动到 A时，$x=BM$ 的值从 0 连续增大到 BA（长度），从而 $Q_1H=Q_1K=x\cos\alpha\sin\beta$ 从 0 连续增大到 $BA\cdot\cos\alpha\sin\beta=AH_1\cos\alpha=H_1S$（其中 $H_1S\perp$

OA，垂足为S）。于是，对于线段H_1H_2上的任一点H'，作$H'Q_1'\perp OA$，垂足为Q_1'，有$0<Q_1'H'<H_1S$，有对应的

$x'=\dfrac{Q_1'H'}{\cos\alpha\sin\beta}$，使

$$Q_1'H'=x'\cos\alpha\sin\beta.$$

由于$0<x'<\dfrac{H_1S}{\cos\alpha\sin\beta}=BA$，所以在线段$BA$上存在一点$M'$，使$AM'=x'$.$H'$就是对应于$M'$点的符合条件的垂心。这就是说，线段$H_1H_2$上的任一点符合条件.

（Ⅱ）当动点M在ΔOAB的内部运动时.我们先考察动点M在ΔOAB内与AB平行的某一条线段$A'B'$上运动时（图7-3），对应的垂心H的轨迹.作$A'H_1'\perp OB$，$B'H_2'\perp OA$，垂足分别为H_1'、H_2'.对$\Delta OA'B'$利用（1）的结论，可知这时点H的轨迹为线段$H_1'H_2'$.

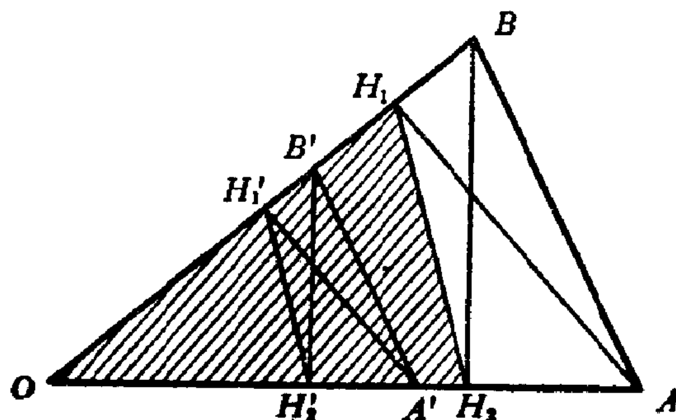


图 7-3

显然，由$A'B'\parallel AB$，$A'H_1'\parallel AH_1$，$BH_2'\parallel BH_2$可知，四边形$H_1'H_2'A'B'$与四边形H_1H_2AB位似，所以$H_1'H_2'\parallel H_1H_2$，且

$$\frac{OH_2'}{OH_2}=\frac{OA'}{OA},$$

设 $OA'=y$，则有 $OH_2'=\dfrac{OH_2\cdot y}{OA}$。

当点 A' 在 OA 上从 O 点连续移动到 A 点时，对应的一系列平行线段 $A'B'$（平行于 AB）就连续充满整个 ΔOAB。这时，y 从 0 连续增大到 OA，从而 $OH_2'=\dfrac{OH_2\cdot y}{OA}$ 的值从 0 连续增大到 OH_2，即对应的 H_2' 点从 O 点连续移动到 H_2 点，这一系列的平行线段 $H_1'H_2'$（平行于 H_1H_2）便连续地移遍整个 ΔOH_1H_2。并且由于当 M 点在线段 AB 上运动时，对应的 H 点的轨迹是线段 H_1H_2；当 M 点在线段 OA 上运动时，H 点的轨迹是线段 OH_1；当 M 点在线段 OB 上运动时，H 点的轨迹是线段 OH_2，所以当 M 点在 ΔOAB 的内部运动时，所求 H 点的轨迹是 ΔOH_1H_2 的内部区域（不包括 ΔOH_1H_2 的边界）。

如果 ΔOAB 是钝角三角形或直角三角形，也有同样的结论，并可类似地作出证明。

题6 分别以 n 个已知点为圆心，以 d 为半径作 n 个圆，这 n 个圆（指圆盘，即圆周及其内部）的交集（公共部分）记作 Φ。

图形 Φ 有下列明显的性质：

① 任一已知点都不可能在图形 Φ 的外部。

因为如果某一已知点在 Φ 的外部，它必定在某一圆外，那么它与此圆圆心的距离就大于 d，与已知 d 是"每两点之间的距离的最大值"矛盾。由此可见，这 n 个已知点或者在图形 Φ

的内部，或者在图形Φ的边界上。

② 图形Φ的内部没有一条所作圆的弧。

因为如果有某一条弧属于Φ，那么它（这条弧或与其他弧一起）就将图形Φ分成两部分，其中一部分就在这弧所在圆的外部，这与图形Φ的意义矛盾。

由于在图形Φ的内部的点，必定在所作出的n个圆内部，它与各已知点（圆心）的距离必定小于d，所以Φ内部的任一已知点都不可能是这个点集的直径的端点。也就是说，直径的两端点必定在图形Φ的边界上。我们研究直径的条数问题，只要研究Φ边界上的那些点就可以了。不妨设n个已知点中有k个点在Φ的边界上，$k\leqslant n$。

由于两个圆至多只有两个交点，所以作出的n个圆的交点不多于$2\cdot C_n^2=n(n-1)$个，因此图形Φ的边界是由有限条弧组成的。

为叙述方便起见，我们把边界上若干条弧的交点叫做图形Φ的顶点。在图形Φ的边界上的k个已知点中，设有l个点不是图形Φ的顶点（$l\leqslant k$），而有$(k-l)$个点是图形的顶点。

又如果边界上的某一已知点不是顶点，那么以这一点为端点的直径至多只有一条。因为如若不然，即至少有两条以它为端点的直径，从而也就至少要有两条弧通过这一点，这与该点不是顶点矛盾。

由于边界上的已知点有l个不是顶点，所以至少有一个端点不是顶点的直径至多只有l条。

我们再来证明：两个端点都是顶点的直径不多于$(k-l)$条。为此，我们先证明：通过某一顶点，且另一端点亦为顶点的直径不多于两条。证明如下：

一方面，所有这种直径的另一端点都在同一个圆周上，因为它们与这某一指定的顶点的距离都等于 d；

另一方面，在图形Φ 的边界上，每一个圆的弧至多只有一段。事实上，如果有同一圆的两段弧在 Φ 的边界上，那么它们之间就有另一圆的弧，连结这弧的两个端点得一条弦。如果两个圆的圆心在此弦的同侧，因为两圆的半径相等，所以两圆的圆心必定重合；如果两圆的圆心在此弦的异侧，这时图形 Φ 就在其中一圆的外部，即有一些已知点与此圆圆心的距离大于 d，显然这是不可能的。

由于图形 Φ 边界上每一圆的弧不多于一段，所以如果同一条弧上有三个已知点，那么其中至多只有两个是顶点。再由上述第一方面的结论，可知通过某一顶点如果它属于已知点集且另一端点也是顶点的直径不多于 2 条。由于边界上只有 $(k-l)$ 个已知点是图形的顶点，所以两个端点都是顶点的直径的条数不多于 $2\cdot(k-l)\cdot\frac{1}{2}=k-l$（因为每一条直径按其两个端点重复计算了两次）。

综上所述，这 n 个已知点的点集的直径至多只有 $l+(k-l)=k$ 条，而 $k\leqslant n$，所以直径不多于 n 条。命题得证。

应该指出，对于任一 $n\geqslant3$，确实存在这样的 n 个点。具有 n 条直径。我们只要作一个边长为 d 的等边三角形 ABC，再以某一顶点 A 为圆心，d 为半径作圆，在 $\overset{\frown}{BC}$ 上任意取 $(n-3)$ 个点：A_1、A_2、…、A_{n-3}，所得的 n 个点 A、B、C 及 A_i $(i=1,2,\cdots,n-3)$ 的点集就有 n 条直径：AB、BC、CA 及 AA_i $(i=1,2,\cdots,n-3)$。这就说明，题目所作的估计 n 是精确的，不可能再加强了。

第 八 届

第八届国际数学奥林匹克于一九六六年七月三日至十三日在保加利亚举行，参加的国家有：保加利亚，匈牙利，德意志民主共和国，蒙古，波兰，罗马尼亚，苏联，捷克斯洛伐克，南斯拉夫。

竞 赛 题

题1　数学竞赛给出 A、B、C 三道题，有 25 个学生参加竞赛，每个学生至少能解出一道题．在没有解出 A 题的学生中，解出 B 题的人数是解出 C 题的人数的两倍．只解出 A 题的人数比其余解出 A 题的人数多 1．在只解出一题的学生中，有一半不能解出 A 题．试求只解出 B 题的学生数．

（苏联， 6 分）

题2　已知一个三角形的三条边长 a、b、c 与各边的对角 A、B、C 满足关系

$$a+b=\operatorname{tg}\frac{C}{2}\cdot(a\operatorname{tg}A+b\operatorname{tg}B),$$

证明这个三角形是等腰三角形．

（匈牙利， 7 分）

题3　证明：正四面体的外接球球心到它的各顶点的距离之和，小于其他任一点到正四面体各顶点的距离之和．

（保加利亚，7分）

题4 证明恒等式

$$\frac{1}{\sin 2x}+\frac{1}{\sin 4x}+\cdots+\frac{1}{\sin 2^n x}=\operatorname{ctg}x-\operatorname{ctg}2^n x.$$

其中 n 为任一自然数，$x \neq \frac{\lambda\pi}{2^k}$（$k=0,1,2,\cdots,n$，$\lambda$ 是任一整数）。

（南斯拉夫，5分）

题5 解方程组

$$\begin{cases}|a_1-a_2|x_2+|a_1-a_3|x_3+|a_1-a_4|x_4=1\\|a_2-a_1|x_1+|a_2-a_3|x_3+|a_2-a_4|x_4=1\\|a_3-a_1|x_1+|a_3-a_2|x_2+|a_3-a_4|x_4=1\\|a_4-a_1|x_1+|a_4-a_2|x_2+|a_4-a_3|x_3=1,\end{cases}$$

其中 a_1、a_2、a_3、a_4 是已知的两两不等的实数。

（捷克斯洛伐克，7分）

题6 在 ΔABC 的三边 AB、BC 与 CA 上分别取点 M、K、L（不与 ΔABC 的顶点重合），证明：ΔMAL、ΔKBM、ΔLCK 中至少有一个的面积不大于 ΔABC 面积的四分之一。

（波兰，8分）

题　　解

题1 我们用 x_A 表示只解出 A 题的人数，用 x_{AB} 表示只解出 A、B 两题的人数，如此等等。

由题意得下列四个方程：

$$x_A+x_B+x_C+x_{AB}+x_{BC}+x_{AC}+x_{ABC}=25, \quad (1)$$

$$x_B + x_{BC} = 2(x_C + x_{BC}), \tag{2}$$

$$x_A = x_{AB} + x_{AC} + x_{ABC} + 1, \tag{3}$$

$$x_A = x_B + x_C, \tag{4}$$

这里 x_A、x_B、x_C、x_{AB}、x_{BC}、x_{AC}、x_{ABC} 都是非负整数。

由(3)得 $x_{AB} + x_{AC} + x_{ABC} = x_A - 1,$ (3)′

代入(1)，得 $x_A + x_B + x_C + x_{BC} + (x_A - 1) = 25,$

即 $2x_A + x_B + x_C + x_{BC} = 26.$ (5)

由(2)得 $x_{BC} = x_B - 2x_C,$ (2)′

将(2)′、(4)代入(5)，得

$$2(x_B + x_C) + x_B + x_C + (x_B - 2x_C) = 26,$$

即 $4x_B + x_C = 26,$

$$x_C = 26 - 4x_B. \tag{6}$$

代入(2)′，得 $x_{BC} = x_B - 2(26 - 4x_B) = 9x_B - 52.$ (7)

由于 x_B、x_C、x_{BC} 均为非负整数，由(6)知，$x_B \leqslant 6$；而由(7)知，$x_B \geqslant 6$。因此，如果问题的解存在的话，只有 $x_B = 6$。

令 $x_B = 6$，由方程(6)、(7)、(4)、(2)′、(3)′，可得 $x_A = 8$，$x_B = 6$，$x_C = 2$，$x_{BC} = 2$，$x_{AB} + x_{AC} + x_{ABC} = 7$。不难验证，取 $x_A = 8$，$x_B = 6$，$x_C = 2$，$x_{BC} = 2$，$x_{AB} = 2$，$x_{AC} = 2$，$x_{ABC} = 3$(当然 x_{AB}、x_{AC}、x_{ABC} 可取满足 $x_{AB} + x_{AC} + x_{ABC} = 7$ 的任一组非负整数值)，满足题给的各条件，即可以作为问题的一组解。这就说明问题的解是存在的。

于是得：只解出 B 题的有 6 个学生。

题2 因为 A、B、C 为三角形三内角，所以有

$$\operatorname{tg}\frac{C}{2} = c\operatorname{tg}\frac{A+B}{2} = \frac{\cos\frac{A+B}{2}}{\sin\frac{A+B}{2}},$$

已知的等式可以写为

$$a\cdot\left(1-\operatorname{tg}A\cdot\frac{\cos\frac{A+B}{2}}{\sin\frac{A+B}{2}}\right)$$

$$+b\cdot\left(1-\operatorname{tg}B\cdot\frac{\cos\frac{A+B}{2}}{\sin\frac{A+B}{2}}\right)=0, \qquad (1)$$

$(1)\times\ \sin\frac{A+B}{2}\cos A\cos B$，得

$$a\cos B\cdot\left(\sin\frac{A+B}{2}\cos A-\cos\frac{A+B}{2}\sin A\right)$$

$$+b\cos A\left(\sin\frac{A+B}{2}\cos B-\cos\frac{A+B}{2}\sin B\right)=0,$$

即 $$a\cos B\cdot\sin\frac{B-A}{2}+b\cos A\sin\frac{A-B}{2}=0,$$

$$\sin\frac{B-A}{2}\cdot(a\cos B-b\cos A)=0, \qquad (2)$$

因此有

$$\sin\frac{B-A}{2}=0 \text{ 或 } a\cos B-b\cos A=0.$$

若 $\sin\frac{B-A}{2}=0$，则因 $-90°<\frac{B-A}{2}<90°$ 可得

$\frac{B-A}{2}=0$，即 $A=B$，

$\therefore\ a=b$，

三角形为等腰三角形。

若 $a\cos B-b\cos A=0$，即有

$$a\cos B=b\cos A \tag{3}$$

又由正弦定理，有

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B},$$

即 $$a\sin B=b\sin A \tag{4}$$

将(3)、(4)两边分别平方后相加，得

$$a^2(\cos^2 B+\sin^2 B)=b^2(\cos^2 A+\sin^2 A),$$

即 $$a^2=b^2,$$

$$\therefore\quad a=b.$$

三角形为等腰三角形。

题 3 设正四面体 $ABCD$，过它的各顶点 A、B、C、D 分别作这个正四面体外接球的切平面，得到一个新的正四面体 $A'B'C'D'$。正四面体 $A'B'C'D'$ 与已知正四面体 $ABCD$ 相位似，位似系数为 -3。从正四面体 $A'B'C'D'$ 内部或各面上的任一点，到各面的距离之和是一个常数，它等于 $\frac{V}{\frac{1}{3}S}$（V 为正四面体 $A'B'C'D'$ 的体积，S 为一个面的面积），即等于正四面体 $A'B'C'D'$ 的高。这个常数也就是正四面体 $ABCD$ 的外接球球心到各顶点 A、B、C、D 的距离之和。根据"点到平面以垂线长为最短"的性质，它必定小于正四面体 $A'B'C'D'$ 内部其他点或面上的任一点到 A、B、C、D 各点的距离之和。

下面再证明正四面体 $ABCD$ 的外接球球心到各顶点的距离之和（即正四面体 $A'B'C'D'$ 的高），小于四面体 $A'B'$

$C'D'$ 外部任一点到 A、B、C、D 各点的距离之和．设M是正四面体 $A'B'C'D'$ 外部的任一点，我们考察以M点为公共顶点，正四面体 $A'B'C'D'$ 的各面为底面的四个四面体：$MA'B'C'$，$MA'B'D'$，$MA'C'D'$，$MB'C'D'$．这四个四面体的全体必定包含四面体 $A'B'C'D'$，即四面体 $A'B'C'D'$ 内的任一点至少属于这四个四面体之一，并且存在着属于这四个四面体之一而不属于四面体 $A'B'C'D'$ 的点．事实上，设N是正四面体 $A'B'C'D'$ 内部的任一点，过M、N两点作直线 MN，它至少与正四面体 $A'B'C'D'$ 的两个面相交，设交点分别为 P、Q，且 $MQ>MN>MP$，于是N点在线段 MQ 上，它必定在以M为顶点，点Q所在的面为底面的四面体内；并且在线段MP上的任一点，也在这个四面体内，但在正四面体 $A'B'C'D'$ 外．由此可见，这四个四面体的体积之和 V' 要大于正四面体 $A'B'C'D'$ 的体积V，所以

$$\frac{V'}{\frac{1}{3}S}>\frac{V}{\frac{1}{3}S}$$

（S表示正四面体 $A'B'C'D'$ 一个面的面积）．即正四面体 $ABCD$ 的外接球球心到它的各顶点的距离之和$\left(=\frac{V}{\frac{1}{3}S}\right)$，必定小于$M$点到正四面体$A'B'C'D'$ 各面的距离之和$\left(=\frac{V'}{\frac{1}{3}S}\right)$，它当然更小于 MA、MB、MC、MD 之和（因为点到平面以垂线长为最短）．

综上所述，正四面体外接球球心到各顶点的距离之和小于其他任一点（不论是在正四面体内、外还是在各面上）到各顶点的距离之和．

题4 因为 $x\neq\frac{\lambda\pi}{2^k}$，所以 $2^k\cdot x\neq\lambda\pi$（$k=0,1,2,\cdots,n$，λ 是整数），$\sin 2^k x\neq 0$，且 $\operatorname{ctg}2^k x$ 有意义.

由 $$\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}2\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}-\frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}=\frac{2\cos^2\alpha-\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}$$

$$=\frac{1}{\sin 2\alpha}$$

得 $$\frac{1}{\sin 2\alpha}=\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}2\alpha \qquad (1)$$

令 $\alpha=x,2x,2^2x,\cdots\cdots,2^{n-1}x$，由(1)得

$$\frac{1}{\sin 2x}=\operatorname{ctg}x-\operatorname{ctg}2x,$$

$$\frac{1}{\sin 4x}=\operatorname{ctg}2x-\operatorname{ctg}4x,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{\sin 2^{n-1}x}=\operatorname{ctg}2^{n-2}x-\operatorname{ctg}2^{n-1}x,$$

$$\frac{1}{\sin 2^n x}=\operatorname{ctg}2^{n-1}x-\operatorname{ctg}2^n x.$$

将这些等式的两边分别相加，即得

$$\frac{1}{\sin 2x}+\frac{1}{\sin 4x}+\cdots+\frac{1}{\sin 2^n x}=\operatorname{ctg}x-\operatorname{ctg}2^n x.$$

题5 在方程组中，如果将足码 i 换成 j，j 换成 i，原方程组不变.不失一般性，可以假定 $a_1>a_2>a_3>a_4$，这时原方程组成为

$$\begin{cases}(a_1-a_2)x_2+(a_1-a_3)x_3+(a_1-a_4)x_4=1 & (1)\\(a_1-a_2)x_1+(a_2-a_3)x_3+(a_2-a_4)x_4=1 & (2)\\(a_1-a_3)x_1+(a_2-a_3)x_2+(a_3-a_4)x_4=1 & (3)\\(a_1-a_4)x_1+(a_2-a_4)x_2+(a_3-a_4)x_3=1 & (4)\end{cases}$$

(1)－(2)、(2)－(3)、(3)－(4)，分别得

$$\begin{cases}(a_1-a_2)(x_2+x_3+x_4-x_1)=0\\(a_2-a_3)(-x_1-x_2+x_3+x_4)=0\\(a_3-a_4)(-x_1-x_2-x_3+x_4)=0\end{cases}$$

即有

$$\begin{cases}x_2+x_3+x_4=x_1 & (5)\\x_1+x_2=x_3+x_4 & (6)\\x_1+x_2+x_3=x_4 & (7)\end{cases}$$

由(5)、(6)、(7)得

$$x_2=x_3=0,\quad x_1=x_4.$$

代入(1)、(4)得

$$x_1=x_4=\frac{1}{a_1-a_4}.$$

经检验可知，当 $a_1>a_2>a_3>a_4$ 时，

$$x_2=x_3=0,\quad x_1=x_4=\frac{1}{a_1-a_4}$$

是原方程组的解。

一般地，当 $a_i>a_j>a_k>a_l$ 时，方程组的解为：

$$x_j=x_k=0, x_i=x_l=\frac{1}{a_i-a_l}.$$

题6 因为有一角相等的两个三角形的面积之比，等于夹这个等角的两边乘积之比，所以有

$$\frac{S_{\Delta KBM}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{BK\cdot BM}{AB\cdot BC}, \quad (1)$$

$$\frac{S_{\Delta MAL}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{AM\cdot AL}{AB\cdot AC}, \quad (2)$$

$$\frac{S_{\Delta LCK}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{CL\cdot CK}{AC\cdot BC}. \quad (3)$$

用反证法，假定$S_{\Delta KBM}$、$S_{\Delta MAL}$、$S_{\Delta LCK}$都大于$\frac{1}{4}S_{\Delta ABC}$，

即$\frac{S_{\Delta KBM}}{S_{\Delta ABC}}>\frac{1}{4}$，$\frac{S_{\Delta MAL}}{S_{\Delta ABC}}>\frac{1}{4}$，$\frac{S_{\Delta LCK}}{S_{\Delta ABC}}>\frac{1}{4}$. 将这三个不等式两边分别相乘，得

$$\frac{S_{\Delta KBM}}{S_{\Delta ABC}}\cdot\frac{S_{\Delta MAL}}{S_{\Delta ABC}}\cdot\frac{S_{\Delta LCK}}{S_{\Delta ABC}}>\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{64}.$$

由等式(1)、(2)、(3)得

$$\frac{BK\cdot BM\cdot AM\cdot AL\cdot CL\cdot CK}{AB\cdot BC\cdot AB\cdot AC\cdot AC\cdot BC}>\frac{1}{64},$$

即
$$\frac{AM\cdot BM}{AB^2}\cdot\frac{BK\cdot CK}{BC^2}\cdot\frac{AL\cdot CL}{AC^2}>\frac{1}{64}. \quad (4)$$

但是，由$\sqrt{AM\cdot BM}\leqslant\frac{AM+BM}{2}=\frac{AB}{2}$，得

$$\frac{AM\cdot BM}{AB^2}\leqslant\frac{1}{4},$$

同理，有$\frac{BK\cdot CK}{BC^2}\leqslant\frac{1}{4}$，$\frac{AL\cdot CL}{AC^2}\leqslant\frac{1}{4}$，

由此可得

$$\frac{AM \cdot BM}{AB^2} \cdot \frac{BK \cdot CK}{BC^2} \cdot \frac{AL \cdot CL}{AC^2} \leqslant \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{64},$$

这与上面推出的不等式(4)相矛盾，故反设不真，即 $S_{\Delta KBM}$、$S_{\Delta MAL}$、$S_{\Delta LCK}$ 中至少有一个不大于$\frac{1}{4}S_{\Delta ABC}$。

第　九　届

第九届国际数学奥林匹克于一九六七年七月二日至十三日在南斯拉夫举行，参加的国家有：英国，保加利亚，匈牙利，德意志民主共和国，意大利，蒙古，波兰，罗马尼亚，苏联，法国，捷克斯洛伐克，瑞典，南斯拉夫。

竞　赛　题

题1　在平行四边形 $ABCD$ 中，ΔABD 是锐角三角形，$AB=a, AD=1$，$\angle BAD=\alpha, K_A$、K_B、K_C、K_D 分别为以平行四边形的顶点为圆心、1为半径的圆．求证：四个圆 K_A、K_B、K_C、K_D 覆盖 $\square ABCD$ 的充分必要条件是

$$a\leqslant\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha.$$

（波兰，6分）

题2　一个四面体，如果有一条且仅有一条棱长大于1，证明这个四面体的体积不大于$\frac{1}{8}$.

（捷克斯洛伐克，7分）

题3　已知k、m、n是正整数，$m+k+1$是大于$n+1$的素数，记 $C_s=s(s+1)$．求证：

$$(C_{m+1}-C_k)(C_{m+2}-C_k)\cdots(C_{m+n}-C_k)$$

能被 $C_1\cdot C_2\cdots C_n$ 整除。

（英国， 8 分）

题 4　已知两个锐角三角形 $\Delta A_0B_0C_0$ 与 $\Delta A_1B_1C_1$，求作一个三角形 ABC，使 $\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$（$A$ 与 A_1、B 与 B_1、C 与 C_1 分别为对应顶点），ΔABC 外接于 $\Delta A_0B_0C_0$（C_0 在 AB 上，A_0 在 BC 上，B_0 在 CA 上），并且 ΔABC 是满足上述条件的三角形中面积最大的一个。

（意大利， 6 分）

题 5　考察数列 $\{c_n\}$：

$$c_1 = a_1 + a_2 + \cdots + a_8,$$

$$c_2 = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_8^2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$c_n = a_1^n + a_2^n + \cdots + a_8^n,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

其中 a_1、a_2、$\cdots$、a_8 是实数，并且不全为零。已知数列 $\{c_n\}$ 中有无限多项等于零，求出使 $c_n = 0$ 的全部正整数 n

（苏联， 7 分）

题 6　运动会连续开了 n 天，一共发了 m 枚奖章。第一天发一枚以及剩下 $(m-1)$ 枚的 $\frac{1}{7}$，第二天发 2 枚以及发后剩下的 $\frac{1}{7}$，以后各天均按此规律发奖章，在最后一天即第 n 天发了剩下的 n 枚奖章。问运动会开了多少天？一共发了多少枚奖章？

（匈牙利， 8 分）

题　解

题1　作$\triangle ABD$的外接圆(图9-1)，因为$\triangle ABD$是锐角三角形，所以外接圆圆心O必在$\triangle ABD$内。

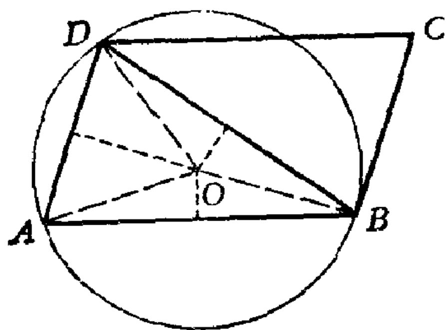


图 9-1

先证明$\square ABCD$的第四个顶点C必在$\odot O$的外部。

用反证法。若C点在$\odot O$上，则因C与A分布在BD的两侧，故$\angle BCD=180°-\angle BAD>90°$，但已知$\angle BCD=\angle BAD<90°$，所以两者矛盾；若$C$在$\odot O$内，则$\angle BCD>180°-\angle BAD>90°$，也与$\angle BCD=\angle BAD<90°$矛盾。因而$C$点不可能在$\odot O$上，也不可能在$\odot O$内，必定在$\odot O$外。

其次，设$\triangle ABD$的外接圆半径为R，我们来证明：$\square ABCD$被四个圆K_A、K_B、K_C、K_D覆盖的充分必要条件为$R\leqslant 1$。

先证必要性，设$\square ABCD$被K_A、K_B、K_C、K_D覆盖，要证明$R\leqslant 1$。用反证法，设$R>1$，即$OA=OB=OD>1$，那么圆K_A、K_B、K_C不可能覆盖点O。又因点C在$\odot O$外，所以$OC>R>1$，圆K_c也不可能覆盖点O。但O点在$\triangle ABD$内，因而在$\square ABCD$内。这就是说，$\square ABCD$内至少有一点O不能被K_A、K_B、K_C、K_D所覆盖，与假设矛盾。因此$R>1$为不可能，即有$R\leqslant 1$。

再证充分性。设$R\leqslant 1$，要证明$\square ABCD$被K_A、K_B、K_C、

K_D覆盖。从点O向ΔABD的三边作垂线，虽然，这些垂线分别将对应的各边平分。这三条垂线与三条半径OA、OB、OD将ΔABD分成六个直角三角形，并且每个直角三角形的斜边等于半径R。由于直角三角形的任一顶点到该直角三角形的任一点的距离不大于斜边，所以ΔABD内任一点M，必定与某一个顶点的距离不大于R，于是以对应的这个顶点为圆心，以1为半径的圆就覆盖点M。因此，当$R\leqslant 1$时，ΔABD被K_A、K_B、K_D覆盖。由对称性可得，ΔCDB被K_C、K_D、K_B覆盖。所以，$\square ABCD$被K_A、K_B、K_C、K_D覆盖。

最后，我们来证明：$R\leqslant 1$的充分必要条件是$a\leqslant\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha$。

在ΔABD中，由$\dfrac{BD}{\sin\angle BAD}=2R$，可得

$$R=\frac{BD}{2\sin\angle BAD}$$

又已知$AD=1$，$AB=a$，$\angle BAD=\alpha$，可得

$$BD=\sqrt{1+a^2-2a\cos\alpha},$$

从而得 $$R=\frac{\sqrt{1+a^2-2a\cos\alpha}}{2\sin\alpha}.$$

因此，$R\leqslant 1$的充分必要条件是

$$\frac{\sqrt{1+a^2-2a\cos\alpha}}{2\sin\alpha}\leqslant 1.$$

解这个关于a的不等式，得

$$\cos\alpha-\sqrt{3}\sin\alpha\leqslant a\leqslant\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha.$$

因为$a=AB>AD\cos\alpha=\cos\alpha$，所以

$$\cos\alpha-\sqrt{3}\sin\alpha\leqslant a$$

总是成立的。

这就证明了：

$$a \leqslant \cos\alpha + \sqrt{3}\sin\alpha$$

是 $R \leqslant 1$ 的充分必要条件，从而也就是 $\square ABCD$ 被圆 K_A、K_B、K_C、K_D 覆盖的充分必要条件。

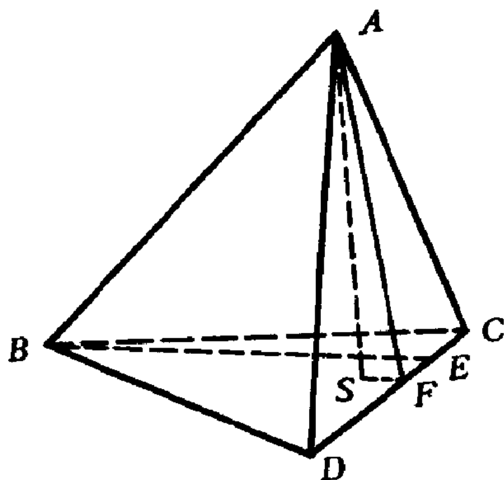


图 9-2

题 2 设 AB 是四面体 $ABCD$ 的最大棱（图 9-2），这时 ΔACD 与 ΔBCD 的各边都不大于 1，设 $CD = a \leqslant 1$，这时容易证明，ΔBCD 的高 BE 与 ΔACD 的高 AF 均不大于 $\sqrt{1-\frac{a^2}{4}}$。

四面体的高 $AS \leqslant AF \leqslant \sqrt{1-\frac{a^2}{4}}$，

四面体的体积为

$$V = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle BCD} \cdot AS = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} CD \cdot BE\right) \cdot AS$$

$$\leqslant \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot \sqrt{1-\frac{a^2}{4}} \cdot \sqrt{1-\frac{a^2}{4}}$$

$$= \frac{1}{24} a \cdot (4 - a^2)$$

$$= \frac{1}{24} \cdot [3 - (1-a) - 2(1-a)^2 - a(1-a)^2]。$$

当 $0\leqslant a\leqslant 1$ 时，$3-(1-a)-2(1-a)^2-a(1-a)^2\leqslant 3$，

$$\therefore\quad V\leqslant\frac{1}{24}\cdot 3,$$

即 $$V\leqslant\frac{1}{8}.$$

题3 $\because$ $$\begin{aligned}C_p-C_q&=p(p+1)-q(q+1)\\&=(p^2+p)-(q^2+q)\\&=(p-q)(p+q+1),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad &(C_{m+1}-C_k)(C_{m+2}-C_k)\cdots\cdots(C_{m+n}-C_k)\\&=[(m+1-k)(m+1+k+1)]\\&\cdot[(m+2-k)(m+2+k+1)]\cdots\cdots\\&\cdot[(m+n-k)(m+n+k+1)]\\&=[(m-k+1)(m-k+2)\cdots\cdots(m-k+n)]\\&\cdot[(m+k+2)(m+k+3)\cdots\cdots(m+k+n+1)].\end{aligned}$$

而 $$\begin{aligned}C_1\cdot C_2\cdots\cdots C_n&=(1\cdot 2)\cdot(2\cdot 3)\cdots\cdots[n\cdot(n+1)]\\&=n!\cdot(n+1)!。\end{aligned}$$

所以要证明 $(C_{m+1}-C_k)(C_{m+2}-C_k)\cdots\cdots(C_{m+n}-C_k)$ 能被 $C_1\cdot C_2\cdots\cdots C_n$ 整除，只要证明

$$\frac{(m-k+1)(m-k+2)\cdots\cdots(m-k+n)}{n!}\cdot\frac{(m+k+2)(m+k+3)\cdots\cdots(m+k+n+1)}{(n+1)!}$$

是整数就可以了.而要证明这个事实，只要证明

$$\frac{(m-k+1)(m-k+2)\cdots\cdots(m-k+n)}{n!}\text{与}$$

$$\frac{(m+k+2)(m+k+3)\cdots\cdots(m+k+n+1)}{(n+1)!}$$

都是整数就可以了。下面我们分别给予证明。

一方面，因为$(m-k+1)(m-k+2)\cdots\cdots(m-k+n)$是$n$个连续整数的积，所以它必能被$n!$整除*。因此，

$$\frac{(m-k+1)(m-k+2)\cdots\cdots(m-k+n)}{n!}$$

是整数。

另一方面，因为从$(m+k+n+1)$个不同元素中取$(n+1)$个不同元素的组合数

$$C_{m+k+n+1}^{n+1}$$

$$=\frac{(m+k+1)(m+k+2)(m+k+3)\cdots(m+k+n+1)}{(n+1)!}$$

是整数，而已知$m+k+1$是一个大于$n+1$的素数，所以$m+k+1$不能被分母$(n+1)!$中的任一因数整除，因此$(m+k+2)(m+k+3)\cdots(m+k+n+1)$能被$(n+1)!$整除，即

---

* "n个连续整数的积必能被$n!$整除"这个结论可以证明如下：若n个连续整数中有一个为零，则其积为零，显然能被$n!$整除；若n个连续整数全为正的，设其最大数为p $(p\geqslant n)$，则从p个不同元素中取n个不同元素的组合数

$C_p^n=\dfrac{p\cdot(p-1)\cdot(p-2)\cdots(p-n+1)}{n!}$是整数，即$n$个连续正整数$p(p-1)(p-2)\cdots(p-n+1)$能被$n!$整除；若$n$个连续整数全为负的，则将每个因数变号就可转化为上述情况得以证明。

$\dfrac{(m+k+2)(m+k+3)\cdots(m+k+n+1)}{(n+1)!}$ 是整数。

综上所述，即得 $(C_{m+1}-C_k)(C_{m+2}-C_k)\cdots(C_{m+n}-C_k)$ 能被 $C_1\cdot C_2\cdots C_n$ 整除。

题4 分析：如图 9-3，设 ΔABC 外接于 $\Delta A_0B_0C_0$，且 $\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$，即有 $\angle A=\angle A_1$，$\angle B=\angle B_1$，$\angle C=\angle C_1$。所以点 A 必在以 B_0C_0 为弦圆周角等于 $\angle A_1$ 的弓形弧 $\overset{\frown}{B_0nC_0}$ 上，点 C 必在以 A_0B_0 为弦圆周角等于 $\angle C_1$ 的弓形弧 $\overset{\frown}{A_0mB_0}$ 上（$\overset{\frown}{A_0mB_0}$、$\overset{\frown}{B_0nC_0}$ 都在 $\Delta A_0B_0C_0$ 外）。这时，过 B_0 点任意作一条直线，与弓形弧 $\overset{\frown}{B_0nC_0}$、$\overset{\frown}{A_0mB_0}$ 分别相交于点 A、C，再作直线 AC_0 与 CA_0，设它们相交于点 B，所得的 ΔABC 便满足题给的前两个条件。

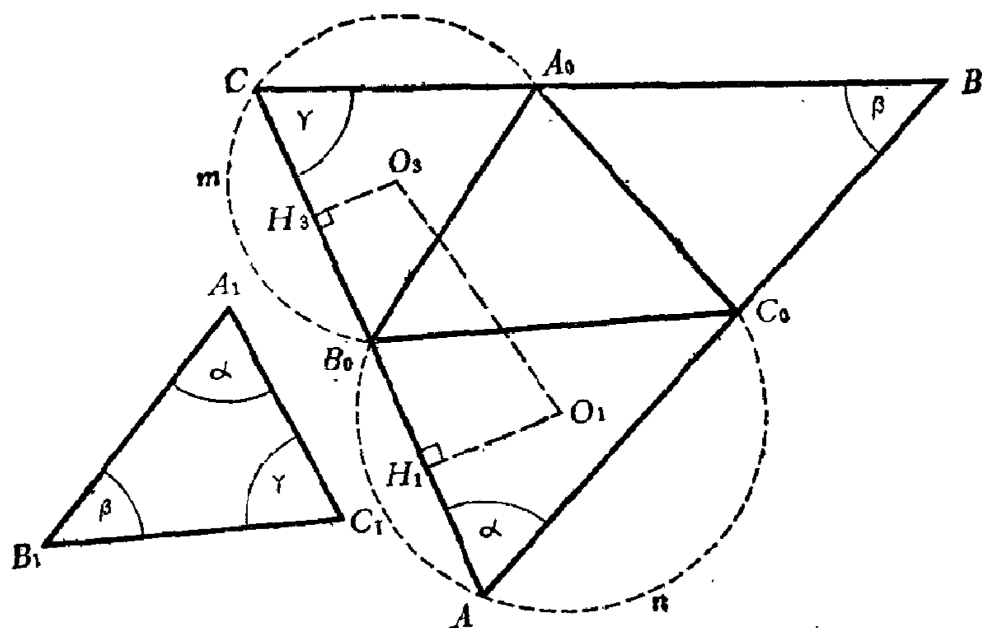


图 9-3

为使作出的 ΔABC 是面积最大的一个，关键在于确定 AC 的位置。因为上面作出的任意三角形都是相似的（均相似于 $\Delta A_1B_1C_1$），所以只要使作出的三角形的一条对应边长最大就可以了。设弓形弧 $\widehat{B_0nC_0}$ 的圆心为 O_1，$\widehat{A_0mB_0}$ 的圆心为 O_3，作 $O_1H_1\perp AB_0$，$O_3H_3\perp CB_0$，垂足分别为 H_1、H_3。因为 H_1H_3 是 O_1O_3 在 AC 上的射影，显然有 $H_1H_3\leqslant O_1O_3$，当且仅当 $AC\parallel O_1O_3$ 时，$H_1H_3=O_1O_3$ 为最大。又因 $B_0C=2B_0H_3$，$AB_0=2H_1B_0$，故 $AC=AB_0+B_0C=2(H_1B_0+B_0H_3)=2H_1H_3$。所以要使 AC 最大，必须且只须 H_1H_3 最大，也就是必须且只须 $AC\parallel O_1O_3$。由此可得作法。

作法：（图 9-4）

① 在 $\Delta A_0B_0C_0$ 外部，在 B_0C_0 上作圆周角为 $\angle A_1$ 的弓形弧 $\widehat{B_0nC_0}$，设圆心为 O_1；在 A_0B_0 上作圆周角为 $\angle C_1$ 的弓

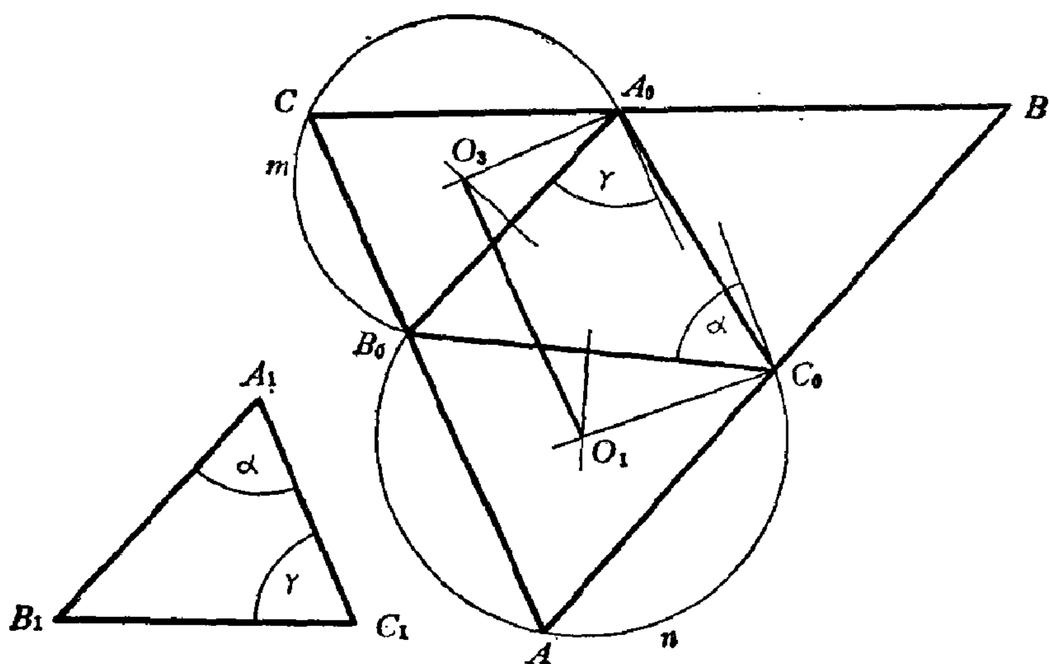


图 9-4

形弧$\overset{\frown}{A_0mB_0}$，设圆心为$O_3$。

② 过B_0作$AC /\!/ O_1O_3$，与弓形弧$\overset{\frown}{B_0nC_0}$、$\overset{\frown}{A_0mB_0}$分别交于点$A$、$C$；

③ 连结CA_0、AC_0并延长相交于点B。则$\triangle ABC$即为所求作的三角形。

证明（略）。

题5 因为对于任意正偶数n，

$a_i^n \geqslant 0\ (i=1,2,\cdots,8)$，

等号当且仅当$a_i=0$时成立。所以对于不全为零的实数a_i $(i=1,2,\cdots,8)$，必有

$$c_n=\sum_{i=1}^{8} a_i^n > 0\ (n\text{为任意正偶数})。$$

因此由题给条件可知，能使$c_n=0$的正整数n不可能为偶数，而只可能为奇数。

由已知，$\{c_n\}$中有无限多项等于零，而对于任意正偶数n，对应的$c_n \neq 0$，所以必有无限多个正奇数n，对应的

$c_n=\sum\limits_{i=1}^{8} a_i^n$等于零。在此基础上，我们可以进一步证明：八个数$a_1$、$a_2$、$\cdots$、$a_8$能分成四对，每一对是互为相反的数。

用反证法。假定a_1、a_2、$\cdots$、a_8中存在着不成这种对的某些a_i，设这些a_i中最大的绝对值为$b(b>0)$，并设有p个为b，q个为$-b$，$p \neq q$。从而$|p-q| \geqslant 1$。这时，八个数a_1、a_2、$\cdots$、a_8可以分为三类，第一类是绝对值大于b的数（如果存在的话），由假设可知，它们是成对出现的（每一对互为相反的

数），因而它们的奇次幂之和等于零；第二类是绝对值等于 b 的数，它们的奇次幂之和为 $(p-q)b^n$，其绝对值等于 $|p-q|b^n$；第三类是绝对值小于 b 的数，设其绝对值最大为 d，显然 $b>d>0$，且其个数小于 8，它们的奇次幂之和必定大于 $-8d^n$。所以可得

$$\left|c_n\right| = \left|\sum_{i=1}^{8} a_i^n\right| > \left|p-q\right| \cdot b^n - 8d^n.$$

对于充分大的奇数 n，必有 $|c_n|>0$。事实上，若取 $n>\dfrac{\lg 16}{\lg b-\lg d}$，即有

$$n\lg\frac{b}{d}>\lg 16,$$

即
$$\left(\frac{b}{d}\right)^n>16.$$

由 $|p-q|\geqslant 1$ 可知 $|p-q|-\dfrac{1}{2}\geqslant\dfrac{1}{2}$，即

$$16=\frac{8}{\frac{1}{2}}\geqslant\frac{8}{|p-q|-\frac{1}{2}},$$

$$\left(\frac{b}{d}\right)^n\geqslant\frac{8}{|p-q|-\frac{1}{2}},$$

$$\left(\left|p-q\right|-\frac{1}{2}\right)\cdot b^n\geqslant 8d^n,$$

即有
$$|c_n|>|p-q|\cdot b^n-8d^n\geqslant\frac{1}{2}b^n>0.$$

这就是说，从$n=\left[\frac{\lg 16}{\lg b-\lg d}\right]+1$* 以后的全部奇次幂之和 C_n 均不等于零，与已知矛盾。

这就证明了：a_1、a_2、…、a_8 这八个数可以分成四对，每一对互为相反的数。从而对于任意正奇数 n，对应的 $C_n=\sum_{i=1}^{8}a_i^n$ 都等于零。由此即得：所求的正整数 n 为一切正奇数。

题6 我们先考察第$(n-k)$天。设在第$(n-k)$天还剩奖章 x_{n-k} 枚。由题给发奖规律可知，这天要发奖章 $(n-k)+\frac{1}{7}[x_{n-k}-(n-k)]$枚，发奖后在下一天即第$(n-k+1)$天剩下的奖章数为

$$x_{n-k+1}=x_{n-k}-(n-k)-\frac{1}{7}[x_{n-k}-(n-k)]$$

$$=\frac{6}{7}(x_{n-k}-n+k),$$

$$\therefore\quad x_{n-k}=\frac{7}{6}x_{n-k+1}-k+n. \tag{1}$$

又由题给条件可知，$x_n=n$，由公式(1)可得

$$x_{n-1}=\frac{7}{6}\cdot n-1+n=\frac{7}{6}n+(n-1),$$

$$x_{n-2}=\left(\frac{7}{6}\right)^2 n+\frac{7}{6}(n-1)+(n-2),$$

---

* $[\alpha]$ 表示不大于α的最大整数，例如 $[5.6]=5$。

....

一般地，有

$$x_{n-k}=\left(\frac{7}{6}\right)^{k}n+\left(\frac{7}{6}\right)^{k-1}\cdot(n-1)+\cdots$$

$$+\frac{7}{6}(n-k+1)+(n-k) \tag{2}$$

其中 $k=0,1,2,\cdots,n-1$。

我们来证明等式(2).对k用数学归纳法，当$k=0$，1 时，等式(2)的成立已如前所证；设等式(2)当 $k=l-1$ 时成立，即有

$$x_{n-l+1}=\left(\frac{7}{6}\right)^{l-1}\cdot n+\left(\frac{7}{6}\right)^{l-2}\cdot(n-1)+\cdots$$

$$+\frac{7}{6}(n-l+2)+(n-l+1) \tag{3}$$

将(3)的两边同乘以$\frac{7}{6}$，并加上 $n-l$，由(1)得

$$x_{n-l}=\left(\frac{7}{6}\right)^{l}\cdot n+\left(\frac{7}{6}\right)^{l-1}\cdot(n-1)+\cdots$$

$$+\frac{7}{6}(n-l+1)+(n-l),$$

这就是说，当 $k=l$ 时等式(2)也成立。

当 $k=n-1$ 时，等式(2)就是

$$x_1=\left(\frac{7}{6}\right)^{n-1}\cdot n+\left(\frac{7}{6}\right)^{n-2}\cdot(n-1)+\cdots+\frac{7}{6}\cdot 2+1, \tag{4}$$

由题给条件知 $x_1=m$，代入(4)式，得

$$m=\left(\frac{7}{6}\right)^{n-1}\cdot n+\left(\frac{7}{6}\right)^{n-2}\cdot(n-1)+\cdots+\frac{7}{6}\cdot 2+1 \tag{5}$$

将(5)两边同乘以$\frac{7}{6}$，得

$$\frac{7}{6}m=\left(\frac{7}{6}\right)^{n}\cdot n+\left(\frac{7}{6}\right)^{n-1}\cdot(n-1)+\cdots+\left(\frac{7}{6}\right)^{2}\cdot 2+\frac{7}{6} \tag{6}$$

(6)－(5)，得

$$\frac{1}{6}m=n\cdot\left(\frac{7}{6}\right)^{n}-\left[\left(\frac{7}{6}\right)^{n-1}+\cdots+\left(\frac{7}{6}\right)^{2}+\frac{7}{6}+1\right]$$

$$=n\cdot\left(\frac{7}{6}\right)^{n}-\frac{\left(\frac{7}{6}\right)^{n}-1}{\frac{7}{6}-1}$$

$$=n\cdot\left(\frac{7}{6}\right)^{n}-6\cdot\left(\frac{7}{6}\right)^{n}+6$$

$$=(n-6)\cdot\left(\frac{7}{6}\right)^{n}+6$$

$$\therefore\qquad m=6(n-6)\left(\frac{7}{6}\right)^{n}+36. \tag{7}$$

因为m是正整数，所以$6(n-6)\cdot\left(\frac{7}{6}\right)^{n}$是整数，即$\frac{(n-6)\cdot 7^{n}}{6^{n-1}}$是整数。因为7与6互质，所以$\frac{n-6}{6^{n-1}}$应是整数，即$n$必须能被6整除。又因$n$是正整数，故$n\geqslant 6$。

当$n\geqslant 6$时，有

$$|n-6|=n-6<n=\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\cdots\cdot\frac{n}{n-1}<2^{n-1}<6^{n-1}.$$

而由$|n-6|<6^{n-1}$可知，$\frac{|n-6|}{6^{n-1}}<1$，于是得

$$\frac{|n-6|}{6^{n-1}}=0,$$

即 $n=6$。

代入(7)，得

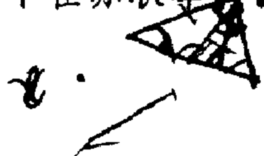
$m=36$。

容易验证：$n=6$，$m=36$ 满足本题要求。

即：运动会开了 6 天，一共发了 36 枚奖章。

第 十 届

第十届国际数学奥林匹克于一九六八年在苏联举行。



竞 赛 题

题1 证明：只存在一个三角形，它的三边长为三个连续的自然数，并且它的三个内角中有一个内角为另一个内角的两倍。

（罗马尼亚）

题2 设 $p(x)$ 是十进制整数 x 的所有数码的乘积，试求使

$$p(x)=x^2-10x-22$$

成立的一切正整数 x。

（捷克斯洛伐克）

题3 设 a、b、c 是实数，并且 $a\neq 0$，今有关于未知数 x_1、x_2、…、x_n 的方程组

$$\begin{cases} ax_1^2+bx_1+c=x_2 \\ ax_2^2+bx_2+c=x_3 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ ax_{n-1}^2+bx_{n-1}+c=x_n \\ ax_n^2+bx_n+c=x_1, \end{cases}$$

并设 $\Delta=(b-1)^2-4ac$。试证明：在实数范围内有

（Ⅰ）当 $\Delta<0$ 时，方程组无解；

（Ⅱ）当 $\Delta=0$ 时，方程组只有一个解；

（Ⅲ）当 $\Delta>0$ 时，方程组有多于一个解。

（保加利亚）

题4 证明：任何一个四面体中总有一个顶点，以这个顶点引出的三条棱为边可构成三角形。

（波兰）

题5 设 a 是大于0的实数，$f(x)$就定义在全体实数 x 上的一个实函数，并且对每一实数 x 下面性质成立

$$f(x+a)=\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-[f(x)]^2}.$$

（Ⅰ）试证明：函数 $f(x)$ 是周期函数，也就是，存在一个实数 $b>0$，使得对每一 x 都有

$$f(x+b)=f(x);$$

（Ⅱ）就 $a=1$ 举出一个这种函数 $f(x)$ 的例子，但是 $f(x)$ 不能是常数。

（德意志民主共和国）

题6 设 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数。试对任意正整数 n 计算和

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right].$$

（英国）

题 解

题1 设 ΔABC 满足题设条件，即 $AB=n$，$AC=n-1$，

$BC=n+1$（这里 n 是大于 1 的自然数），并且 $\triangle ABC$ 的内角分别为 α、2α 和 $\pi-3\alpha\left(0<\alpha<\frac{\pi}{3}\right)$。

由于在同一三角形中，较大的边所对的角也较大，因此可能出现的情况只有如图 10-1 所示的三种：

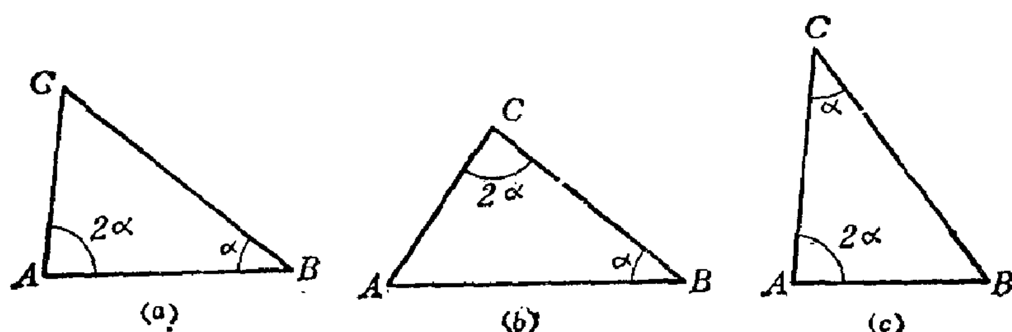


图 10-1

因为

$$\frac{\sin(\pi-3\alpha)}{\sin\alpha}=\frac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha}=\frac{4\sin\alpha\cos^2\alpha-\sin\alpha}{\sin\alpha}$$

$$=4\cos^2\alpha-1=\left(\frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha}\right)^2-1,$$

所以利用正弦定理可知在情况(a)中有

$$\frac{n}{n-1}=\frac{\sin(\pi-3\alpha)}{\sin\alpha}=\left(\frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha}\right)^2-1$$

$$=\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^2-1.$$

从而得到 $n^2-5n=0$，即 $n=5$。

同样，在情况(b)中有

$$\frac{n+1}{n-1}=\left(\frac{n}{n-1}\right)^2-1.$$

从而得到，$n^2-2n=0$，即 $n=2$。这是不合要求的，因为长度分别为 1、2、3 的三条线段不能构成三角形。

在情况(c)中有

$$\frac{n-1}{n}=\left(\frac{n+1}{n}\right)^2-1.$$

从而得到，$n^2-3n-1=0$。但是这个方程没有整数解，因而也不存在满足题设条件的三角形。

综上所述，满足题设条件的三角形的三边长只有 4、5、6 三个自然数。

再来证明这样构成的三角形的三个内角中确有一个内角是另一个内角的两倍。

由余弦定理可得

$$\cos B=\frac{5^2+6^2-4^2}{2\times5\times6}=\frac{3}{4},\ 0<B<\frac{\pi}{2}.$$

$$\cos A=\frac{4^2+5^2-6^2}{2\times4\times5}=\frac{1}{8}=2\times\left(\frac{3}{4}\right)^2-1$$

$$=\cos 2B,\ 0<A<\frac{\pi}{2}.$$

所以 $A=2B$。

题 2 设十进制自然数 x 的数码个数为 n；并且 x 满足题设条件，于是应有

$$p(x)\leqslant 9^n,\ x\geqslant 10^{n-1}.$$

① 若 $n=1$，则有 $p(x)=x$，即

$$x^2-10x-22=x,$$

但是这个二次方程没有整数解，故知 n 不能为 1。

② 若 $n=2$，则有

$$x^2-10x-22=p(x)\leqslant 81,$$

从而

$$x^2-10x+25=p(x)+47\leqslant 128,$$

$$|x-5|\leqslant\sqrt{128}<12,$$

$$-7<x<17;$$

又因为 $x\geqslant 10$，所以

$$10\leqslant x\leqslant 16.$$

另一方面，由

$$p(x)+47=(x-5)^2\leqslant 128,$$

可知，$p(x)+47$ 是一个整数的平方，并且不大于 128，可以就 $x=10,11,12,13,14,15,16$ 逐一检验如下：

x	10	11	12	13	14	15	16
$p(x)$	0	1	2	3	4	5	6
$p(x)+47$	47	48	49	50	51	52	53

由此可见，只有 $x=12$ 符合要求。不难验证，这个数满足题意。

③ 若 $n>2$，则因 $x\geqslant 10^{n-1}$，故有

$$0<10^{n-1}-5\leqslant x-5,$$

$$(10^{n-1}-5)^2\leqslant(x-5)^2,$$

$$p(x)=(x-5)^2-47\geqslant 10^{2n-2}-10^n-22.$$

另一方面，由 $n>2$ 可知 $10^n\geqslant 1000$，$10^{n-2}-2\geqslant 8$，因此

$$10^n(10^{n-2}-2)\geqslant 8000.$$

从而有 $$p(x)\geqslant 10^{2n-2}-10^n-22=10^n(10^{n-2}-2)+10^n-22\geqslant 10^n+8000-22>10^n.$$

但是这与 $p(x)\leqslant 9^n$ 矛盾，所以 n 不能大于 2 .

综上所述，满足题意的正整数只有 $x=12$。

题3 首先讨论使各 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$ 相等的实数解。设 $x_i=y(i=1,2,\cdots,n)$，则方程组变形为

$$ay^2+(b-1)y+c=0,$$

当 $\Delta=(b-1)^2-4ac<0$ 时，方程没有实数解；当 $\Delta\geqslant 0$ 时，有

$$y_{1,2}=\frac{1-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$$

并且当 $\Delta=0$ 时，有相等的实数解；当 $\Delta>o$ 时，有两个不等的实数解。

下面证明，当 $\Delta\leqslant 0$ 时，原方程组不会再有其他的实数解.为此，将方程组中各方程相加，得

$$a\sum_{i=1}^{n}x_i^2+(b-1)x+nc=0, \tag{1}$$

这里，$x=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i$。

另一方面，由于

$$x_i^2+x_j^2\geqslant 2x_ix_j,(i,j=1,2,\cdots,n)$$

当且仅当 $x_i=x_j$ 时等号成立，从而可得

$$x^2=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2\leqslant n\sum_{i=1}^{n}x_i^2,$$

当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 时等号成立。也就是说，

$$\sum_{i=1}^{n}x_i^2=\frac{1}{n}x^2+k,\ \ k\geqslant 0,$$

当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 时，$k=0$。关于 $k=0$ 的情况，上面已经讨论过了，故可设 $k>0$。这时方程(1)变形为

$$x^2+\frac{n}{a}(b-1)x+\frac{n^2c}{a}+nk=0. \qquad (2)$$

因为 $\frac{4a^2}{n}k>0, \Delta\leqslant 0$，方程(2)的判别式 $\Delta'=\frac{n^2}{a^2}(\Delta-\frac{4a^2}{n}k)<0$，所以它关于 x 没有实数解，从而原方程组关于 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 没有其他实数解。

题 4 设四面体为 $ABCD$，它的棱长分别为

$$BC=a, AC=b, AB=c, AD=d, BD=e, CD=f.$$

(图 10-2)。

不失一般性，设各棱中最长的一条棱是 $AD=d$，因此必有

$$d+e>f, d+b>c, d+f>e, d+c>b; \qquad (1)$$

另一方面，在 ΔABD 和 ΔADC，应有

$$c+e>d,\ b+f>d,$$

由此可得

$$b+c+e+f>2d.$$

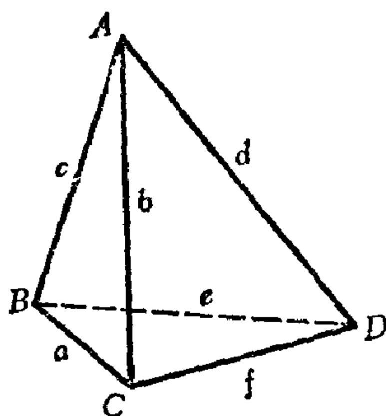


图 10-2

上式表明，下列不等式至少有一个成立：

$$b+c>d,\ e+f>d.$$

再根据(1)便可断定，以点 A(或点 D)引出的三条棱 b、c、d(或 d、e、f)为边确实可以构成一个三角形。

题5 （Ⅰ）根据题给条件我们有

$$
\begin{aligned}
f(x+2a) &= f[(x+a)+a] \\
&= \frac{1}{2}+\left\{f(x+a)-[f(x+a)]^2\right\}^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{2}+\left\{\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-[f(x)]^2}\right. \\
&\quad -\left\{\frac{1}{4}+\sqrt{f(x)-[f(x)]^2}\right. \\
&\quad \left.\left.+f(x)-[f(x)]^2\right\}\right\}^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{2}+\left\{\frac{1}{4}-f(x)+[f(x)]^2\right\}^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{2}+\left|f(x)-\frac{1}{2}\right|. \qquad (1)
\end{aligned}
$$

由于

$$f(x)=\frac{1}{2}+\sqrt{f(x-a)-[f(x-a)]^2}\geqslant\frac{1}{2},$$

所以

$$\left|f(x)-\frac{1}{2}\right|=f(x)-\frac{1}{2},$$

从而由(1)可得，

$$f(x+2a)=\frac{1}{2}+f(x)-\frac{1}{2}=f(x).$$

这就证明了 $f(x)$ 是周期函数，这里 $b=2a$。

(Ⅱ) 就 $a=1$ 举出周期函数 $f(x)$ 的例子如下：

$$f(x)=\frac{1}{2}\left(1+\left|\cos\frac{\pi x}{2}\right|\right),$$

这里周期 $b=2$。这个函数符合题意。因为

$$f(x+1)=\frac{1}{2}\left[1+\left|\cos\left(\frac{\pi x}{2}+\frac{\pi}{2}\right)\right|\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left(1+\left|\sin\frac{\pi x}{2}\right|\right)$$

$$=\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1+\left|\cos\frac{\pi x}{2}\right|}{2}\times\frac{1-\left|\cos\frac{\pi x}{2}\right|}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)[1-f(x)]}$$

$$=\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-[f(x)]^2}.$$

题6 首先，对于任何正整数 n，当 $2^k>n$ 时，必有

$$\frac{n}{2^{k+1}}<\frac{1}{2}\quad 即\quad \frac{n+2^k}{2^{k+1}}<1;$$

从而有当 $2^k>n$ 时，

$$\left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right]=0.$$

由此可知，对于任何正整数 n，总可找到一个非负整数 $l=[\log_2 n]$，使得

当 $k>l$ 时，$\left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right]=0$；

当 $k\leqslant l$ 时，$\left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right]\neq 0$. (1)

因而所求的和为：

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right]=\sum_{k=0}^{l}\left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right].$$

令 $C_k=\left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right](k=0,1,\cdots,l)$，则 C_k 是具有下列性质的正整数 m 中的最大者：

$$m\leqslant\frac{n+2^k}{2^{k+1}}$$

即
$$2^{k+1}m-2^k\leqslant n. \tag{2}$$

考虑下面的数列

$$\{2^{k+1}m-2^k\}, \left(\text{其中}\begin{matrix}k=0, 1, \cdots l;\\ m=1, 2, \cdots, C_k\end{matrix}\right) \tag{3}$$

由于每一个 k 对应数列（3）的 C_k 项，因而数列（3）的项数为

$$\sum_{k=0}^{l}C_k,$$

并且，由于

$$2^{k+1}m-2^k=2^k(2m-1),$$

所以，数列(3)的每一项都是形如 $2k(2m-1)$ 且不大于 n 的正整数。

另一方面，每个不大于 n 的正整数 S 都可以唯一地表示成 $S=2^k(2m-1)$ 的形式，并且，在这个表示式中有 $0\leqslant k\leqslant l$，$1\leqslant m\leqslant C_k$（因为由 $S\geqslant1$ 可知 $m\geqslant1$，又由于 $m=\frac{S+2^k}{2^{k+1}}\leqslant$

$\frac{n+2^k}{2^{k+1}}$，所以由(1)可知 $0\leqslant k\leqslant l$，并且 $m\leqslant\left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right]=C_k$)。

这就表明，1，2，…，n 中的每个数都出现在数列(3)中，而且只出现一次，因此，数列(3)的项数为 n。

于是

$$\sum_{k=0}^{l} C_k = n,$$

从而所求的和为

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right]=n.$$

第 十 一 届

第十一届国际数学奥林匹克于一九六九年在罗马尼亚举行。

竞 赛 题

题 1 证明：存在无限多个自然数 a 具有下述性质，使得对一切自然数 n，数

$$z=n^4+a$$

不是素数。

（德意志民主共和国）

题 2 设 $a_1,a_2\cdots,a_n$ 都是实常数，x 是一个实变数，又

$$f(x)=\cos(a_1+x)+\frac{1}{2}\cos(a_2+x)+\frac{1}{2^2}\cos(a_3+x)$$

$$+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\cos(a_n+x)$$，试证：从

$$f(x_1)=f(x_2)=0$$

可推得

$$x_2-x_1=m\pi,$$

其中 m 是一个整数。

（匈牙利）

题 3 为了使 k 条棱的长度为 a，其余 $6-k$ 条棱的长度为

1 的四面体存在，正实数 a 必须满足的充分必要条件是什么？试就 $k=1, 2, 3, 4, 5$ 分别讨论之。

（波兰）

题4 设 γ 是以线段 AB 为直径的半圆，C 是 γ 上与 A、B 不同的一点，D 是 C 到 AB 的垂线的垂足，又设 γ_1、γ_2、γ_3 是三个圆，它们有一条公切线 AB，并且 γ_1 是 $\triangle ABC$ 的内切圆，而 γ_2 和 γ_3 都与线段 CD 和半圆 γ 相切。试证：圆 γ_1、γ_2、γ_3 还有第二条共切线。

（荷兰）

题5 已知一平面内有 n 个点($n>4$)，其中没有三点在一直线上，试证：至少可以找到 C_{n-3}^{2} 个以上述点为顶点的凸四边形。

（蒙古）

题6 证明：对满足

$$x_1>0, x_2>0, x_1y_1-z_1^2>0, x_2y_2-z_2^2>0$$

的一切实数 x_1、x_2、y_1、y_2、z_1、z_2，不等式

$$\frac{8}{(x_1+x_2)(y_1+y_2)-(z_1+z_2)^2}$$

$$\leqslant\frac{1}{x_1y_1-z_1^2}+\frac{1}{x_2y_2-z_2^2}$$

成立。并且给出式中等号成立的充分必要条件。

（苏联）

题　　解

题1　令 $a=4k^4$，其中 k 为大于 1 的自然数，于是有

$$
\begin{aligned}
z &= n^4 + a = n^4 + 4k^4 \\
&= (n^2 + 2k^2)^2 - 4n^2k^2 \\
&= (n^2 + 2k^2 + 2nk)(n^2 + 2k^2 - 2nk) \\
&= [(n+k)^2 + k^2][(n-k)^2 + k^2]. \qquad (1)
\end{aligned}
$$

由于 $k>1$,所以对一切自然数 n 都有

$$(n+k)^2>0, \quad (n-k)^2\geqslant 0,$$

从而

$$(n+k)^2 + k^2>1, \quad (n-k)^2 + k^2>1.$$

也就是说,式(1)右端的两个因数都大于 1 . 因此,当 $a=4k^4$,并且 $k>1$ 时,对一切自然数 n ,数

$$z = n^4 + a$$

是合数. 又因为大于 1 的自然数 k 有无限多个, 所以数 $a=4k^4$ 也有无限多个,此时,对一切自然数 n , 数 $z=n^4+a$ 都不是素数.

题 2 首先证明函数 $f(x)$ 不恒等于零.

由于对一切实数 x 恒有 $\cos(a_i + x)\geqslant -1\,(i=1,2,\cdots n)$,故有

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\cos(a_2+x) + \frac{1}{2^2}\cos(a_3+x) + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}\cos(a_n+x) \\
&\geqslant -\frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} - \cdots - \frac{1}{2^{n-1}} \\
&= -1 + \frac{1}{2^{n-1}}.
\end{aligned}
$$

又因为总存在一实数 x_o 使 $\cos(a_1 + x_o) = 1$,所以

$$f(x_o)\geqslant \cos(a_1 + x_o) - 1 + \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^{n-1}},$$

这就证明了函数$f(x)$不恒等于零.

其次,根据加法定理可得

$$f(x)=\cos x\cos a_1+\frac{1}{2}\cos x\cos a_2+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\cos x\cos a_n-\sin x\sin a_1-\frac{1}{2}\sin x\sin a_2-\cdots-\frac{1}{2^{n-1}}\sin x\sin a_n$$

$$=\cos x\left(\cos a_1+\frac{1}{2}\cos a_2+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\cos a_n\right)-\sin x\left(\sin a_1+\frac{1}{2}\sin a_2+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\sin a_n\right).$$

令

$$b=\cos a_1+\frac{1}{2}\cos a_2+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\cos a_n, \qquad (1)$$

$$c=\sin a_1+\frac{1}{2}\sin a_2+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\sin a_n. \qquad (2)$$

(显然,b和c是常数),于是有

$$f(x)=b\cos x-c\sin x. \qquad (3)$$

由题意知

$$f(x_1)=f(x_2)=0,$$

亦即

$$b\cos x_i-c\sin x_i=0,(i=1、2) \qquad (4)$$

另一方面如果

$$b^2+c^2=0,$$

那么$b=c=0$,从而由(3)可得对于x的一切实数值有$f(x)=0$,上面已经证明,这是不可能的.也就是说,$b^2+c^2\neq0$,因此,可以用$\sqrt{b^2+c^2}$除等式(4)的两端,得

$$\frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}}\cos x_i-\frac{c}{\sqrt{b^2+c^2}}\sin x_i=0,(i=1,2)。\quad(5)$$

若取一实数 z，使

$$\frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}}=\cos z,\quad \frac{c}{\sqrt{b^2+c^2}}=\sin z,$$

则由式(5)可得

$$\cos z\cos x_i-\sin z\sin x_i=0,\qquad (i=1,2)$$

即

$$\cos(x_i+z)=0。\qquad (i=1,2)$$

由此可得，

$$x_1+z=\frac{\pi}{2}+t_1\pi,\ x_2+z=\frac{\pi}{2}+t_2\pi,\qquad(6)$$

其中 t_1 和 t_2 是整数。由(6)式可得

$$x_2-x_1=(t_1-t_2)\pi=m\pi,$$

其中 $m=t_1-t_2$ 是整数。

题 3 我们按照以下顺序讨论：

$k=1$、$k=5$、$k=2$、$k=4$、$k=3$。

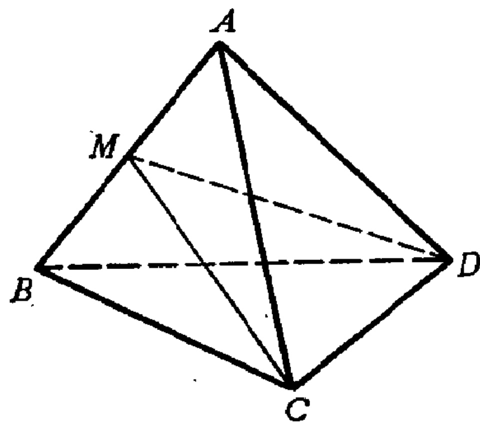


图 11-1

情形 1 ：$k=1$。

首先来找必要条件。假定四面体 $ABCD$ 具有题中所给的性质，不妨假设

$$AB=a,AC=BC=AD=BD=CD=1。$$

由于三角形两边之和大于第三边，故可得到初步的必要

条件

$$0<a<2。$$

设棱 AB 的中点是M，于是

$$CM=DM=\sqrt{1-\frac{a^2}{4}}.$$

在 ΔCDM 中有

$$CM+DM>CD,$$

故可得

$$2\sqrt{1-\frac{a^2}{4}}>1,$$

即 $a^2<3$，

这样就得到了更确切的必要条件：

$$0<a<\sqrt{3}. \tag{1}$$

条件(1)也是充分条件。因为，如果条件(1)成立，那么必有

$$1+1>a,\ 1+a>1.$$

从而可知存在一个 ΔABC，使得

$$AB=a<\sqrt{3},\ AC=BC=1.$$

设点M是线段 AB 的中点,在 ΔABC 的平面外取一点D，使

$$DM=CM=\sqrt{1-\frac{a^2}{4}},\ CD=1,$$

由于

$$CM+CD>DM,\ DM+CD>CM,$$

$$CM+MD>CD.$$

故存在一个 ΔCMD。又由于 ΔCMD 的平面可以与ΔABC 的平面垂直,从而可知，在 ΔABC 的平面外存在一点D，使得

$AD=BD=CD=1$。这就表明，条件(1)也是四面体 $ABCD$ 存在的充分条件。

情形 2 ：$k=5$。

这情形可以归结为 $k=1$ 的情形，因为，在讨论中只要把长度为 a 的棱和长度为 1 的棱交换就行了。所以，这情形下的充分必要条件是

$$0<\frac{1}{a}<\sqrt{3} \quad \text{即} \quad a>\frac{\sqrt{3}}{3}. \tag{2}$$

情形 3 ：$k=2$。

为了找出 a 必须满足的充分必要条件，分别讨论下面两种情况：

① 长度为 a 的两条棱同属于一个三角形。不妨假设

$$AC=BC=a,\quad AB=AD=BD=CD=1.$$

根据 ΔABC 中的三边关系，可得到初步的必要条件：

$$2a>1 \quad \text{即} \quad a>\frac{1}{2}.$$

仍设棱 AB 的中点是 M，于是在 ΔCDM 中有

$$CD+DM>CM,$$

从而有

$$1+\frac{\sqrt{3}}{2}>\sqrt{a^2-\frac{1}{4}},$$

$$1+\sqrt{3}+\frac{3}{4}>a^2-\frac{1}{4},$$

$$a^2<2+\sqrt{3},$$

$$0<a<\sqrt{2+\sqrt{3}}. \tag{3}$$

另一方面，在 ΔCDM 中又有

$$DM+CM>CD,$$

从而有

$$\frac{\sqrt{3}}{2}+\sqrt{a^2-\frac{1}{4}}>1,$$

$$\sqrt{a^2-\frac{1}{4}}>1-\frac{\sqrt{3}}{2}>o,$$

$$a^2-\frac{1}{4}>1-\sqrt{3}+\frac{3}{4},$$

$$a^2>2-\sqrt{3},$$

$$a>\sqrt{2-\sqrt{3}}. \quad (4)$$

于是得到更确切的必要条件：

$$\sqrt{2-\sqrt{3}}<a<\sqrt{2+\sqrt{3}}. \quad (5)$$

条件(5)也是充分的．因为，类似情形1中的讨论可知，存在ΔDMC，从而也存在四面体$ABCD$.

所以，条件(5)是这情形下的充分必要条件．

② 长度为a的两条棱不属于同一个三角形．

不妨假设

$$AB=CD=a, AC=BC=AD=BD=1.$$

根据ΔABC中的三边关系，可得到初步的必要条件

$$0<a<2.$$

在ΔCDM中有(M是AB的中点)

$$CM=DM=\sqrt{1-\frac{a^2}{4}},\ CD=a,$$

故

$$2\sqrt{1-\frac{a^2}{4}}>a,$$

$$2a^2<4,$$

这样就得到了更确切的必要条件：

$$0<a<\sqrt{2} \tag{6}$$

条件(6)也是充分条件．因为类似情形1中的讨论可知，当此条件成立时，具有所述特征的四面体是存在的．

综合①和②的讨论可知，对 $k=2$ 的情形，存在具有所述特征的四面体的充分必要条件应该是(5)和(6)所给定的正实数集合的并集，因而，对 $k=2$ 的情形，所要找的充分必要条件是

$$o<a<\sqrt{2+\sqrt{3}}. \tag{7}$$

情形4：$k=4$。

这情形可以归结为 $k=2$ 的情形．因为，在讨论中只要把长度为 a 的棱和长度为1的棱交换就行了．所以，在这情形下的充分必要条件是

$$0<\frac{1}{a}<\sqrt{2+\sqrt{3}},$$

即
$$a>\frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}=\sqrt{2-\sqrt{3}}. \tag{8}$$

情形5：$k=3$。

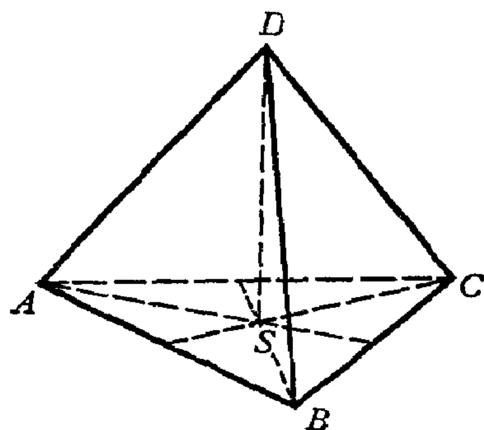


图 11-2

为了找出 a 必须满足的充分必要条件，分别讨论下面两种情况：

① 长度为1的三条棱同属于一个三角形．

不妨假设

$AB=BC=CA=1$,

$DA=DB=DC=a$。

设正三角形 ABC 的重心是 S，于是 DS 垂直于 $\triangle ABC$ 所在的平面，因而

$$SD=\sqrt{a^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2},$$

由此可得必要条件是

$$a>\frac{\sqrt{3}}{3}. \tag{9}$$

条件(9)也是充分条件。因为，如果条件(9)成立，则在 $\triangle ABC$ 的平面外存在一点 D，使得点 D 与 $\triangle ABC$ 的重心 S 的联线 SD 垂直于 $\triangle ABC$ 的平面，并且 $SD=\sqrt{a^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}$，也就是说，四面体 $ABCD$ 是存在的。

② 长度为 a 的三条棱属于同一个三角形。

不妨假设，

$$AB=BC=CA=a,\quad DA=DB=DC=1.$$

类似①可得

$$SD=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2},$$

由此得到必要条件：

$$0<a<\sqrt{3}. \tag{10}$$

同样，这个条件也是充分条件。

除上述①和②两种情况外，其他情况无需讨论了。因为，对 $k=3$ 的情形，由条件(9)和(10)所确定的正实数集合的并集是全体正实数集

$$a>0. \tag{11}$$

所以，对 $k=3$ 的情形，所要找的充分必要条件是(11)。

综合上述，具有题中所给特征的四面体存在的充分必要条件是：

当 $k=1$ 时，$0<a<\sqrt{3}$，

当 $k=2$ 时，$0<a<\sqrt{2+\sqrt{3}}=\frac{1}{2}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$，

当 $k=3$ 时，$0<a$，

当 $k=4$ 时，$a>\sqrt{2-\sqrt{3}}=\frac{1}{2}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$，

当 $k=5$ 时，$a>\frac{\sqrt{3}}{3}$。

题 4 设圆 y_i 的圆心为 M_i，半径为 r_i，点 M_i 在 AB 上的正射影为 $N_i(i=1、2、3)$，圆 y 的圆心为 O，并记

$$BC=a,\ CA=b,\ AB=c,$$
$$AD=p,\ DB=q=c-p,$$
$$\frac{a+b+c}{2}=s.$$

又设点 N_2 在线段 AD 内，点 N_3 在线段 BD 内。

首先计算半径 r_2、r_3 和 r_1。

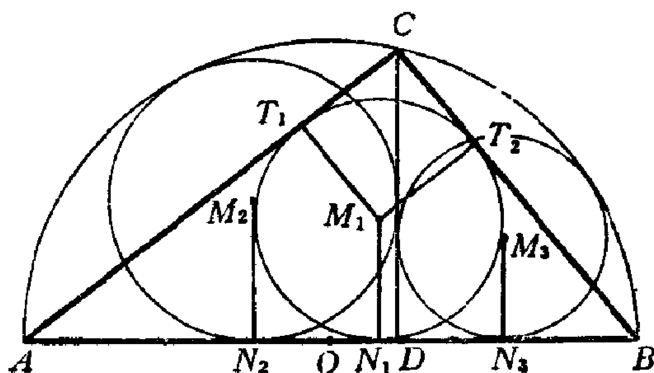


图 11-3

因为 N_2 是圆 y_2 在 AB 上的切点，所以在 rt.$\triangle OM_2N_2$ 中有

$$N_2O = N_2D + DB - OB = r_2 + q - \frac{c}{2},\quad M_2N_2 = r_2.$$

同样地，因为圆 y_2 和半径为 $\frac{c}{2}$ 的圆 y 内切，所以

$$OM_2 = \frac{c}{2} - r_2.$$

从而由勾股定理可得，

$$\left(r_2 + q - \frac{c}{2}\right)^2 + r_2^2 = \left(\frac{c}{2} - r_2\right)^2,$$

即

$$(r_2 + q)^2 - cq - cr_2 + \frac{c^2}{4} + r_2^2 = \frac{c^2}{4} - cr_2 + r_2^2.$$

由此可知

$$(r_2 + q)^2 = cq.$$

又因为 $AB \cdot DB = CB^2$，即 $cq = a^2$，所以

$$(r_2 + q)^2 = a^2.$$

由于 $r_2 + q > 0$，$a > 0$，故有

$$r_2 + q = a,$$

即
$$r_2 = a - q. \tag{1}$$

类似地，由 rt.$\triangle ON_3M_3$ 可得

$$r_3 = b - p. \tag{2}$$

因为圆 y_1 与 rt.$\triangle ABC$ 的直角边 AC、BC 分别切于点 T_1 和 T_2，所以四边形 $CT_1M_1T_2$ 是正方形，从而 $M_1T_1 = CT_1$；又因为 $CT_1 + AN_1 + BT_2 = s$，$AN_1 + BT_2 = c$，所以，

$CT_1 = s - c$，即

$$r_1 = s - c. \tag{3}$$

其次，由(1)、(2)和(3)可得

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(M_2N_2 + M_3N_3) &= \frac{1}{2}(r_2 + r_3)\\ &= \frac{1}{2}(a - q + b - p)\\ &= \frac{1}{2}(a + b - c)\\ &= s - c = M_1N_1,\end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(BN_2 + BN_3) &= \frac{1}{2}(q + r_2 + q - r_3)\\ &= \frac{1}{2}(2q + a - q - b + p)\\ &= \frac{1}{2}(a + c - b) = BN_1.\end{aligned} \tag{5}$$

由(5)可知，N_1是线段N_2N_3的中点，从而由(4)可知，M_1是线段M_2M_3的中点，也就是说，三点M_1、M_2、M_3在同一条直线上。由此可见，直线AB关于直线M_2M_3的对称直线也与三个圆y_1、y_2、y_3相切。这就证明了，这三个圆除了公切线AB外，还有第二条公切线。

题5 首先讨论$n=5$的情形，这时$C_{n-3}^2 = C_2^2 = 1$，故只要找出一个凸四边形就行了。可以分三种情况讨论如下：

① 给定的5点就是一个凸五边形的顶点。显然，这5点中任意4点都是凸四边形的顶点，故此时命题成立。

② 给定的5点中有4点是一个凸四边形的顶点，另外一

点在此四边形内部。显然，此时命题也成立。

③ 给定的5点中，有2点（点D和点E）在另外三点（点A、点B和点C）所构成的三角形内部。此时由题意知，直线DE不会通过点A、B、C，即直线DE必与ΔABC的两条边分别相交于点P和Q，不妨假设点P在线段AB内，点Q在线段AC内。由此可知，四边形$BCED$的对角线BE和CD都在它的内部，所以，$BCED$是凸四边形。

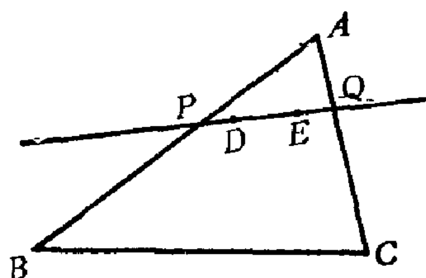


图 11-4

这就证明了：已知一平面内有5点，并且其中没有三点在一直线上，则至少可以找到1个以给定的点为顶点的凸四边形。

再来讨论$n>4$的情形。这时给定的n个点的集合有C_n^5个不同的5个点的子集合，由上面的讨论可知，每个子集合至少有一个以该子集合的点为顶点的凸四边形，因而可得出C_n^5个凸四边形。然而，这些凸四边形中可能有些是相同的，因为对其中每个凸四边形来说，它的四个顶点与另外$n-4$个点中的某一点可构成一个5个点的子集合，因而每个凸四边形的顶点至多属于$n-4$个5个点的子集合，由此可知，这种凸四边形的总数大于或等于$\frac{1}{n-4}C_n^5$。

设 $f(n)=\frac{1}{n-4}C_n^5$，$g(n)=C_{n-3}^2$，

我们证明，当$n>4$时，有

$$f(n) \geqslant g(n).$$

首先，不难验证

$$f(5)=g(5),\ f(6)=g(6)$$

其次，由于

$$f(n)-g(n)=\frac{1}{5!}n(n-1)(n-2)(n-3)$$

$$-\frac{1}{2!}(n-3)(n-4)$$

$$=\frac{1}{5!}(n-3)[n(n-1)(n-2)-60(n-4)],$$

并且，当 $n \geqslant 7$ 时，

$$n(n-1)(n-2)=n^3-3n^2+2n$$

$$=(n^2+n+6)(n-4)+24$$

$$=[n(n+1)+6](n-4)+24$$

$$>60(n-4)+24,$$

故知当 $n \geqslant 7$ 时，

$$f(n)>g(n).$$

这就证明了，至少存在 C_{n-3}^2 个以给定点为顶点的凸四边形。

注：实际上，我们证明了更强的结论：当 $n>6$ 时，至少存在$\frac{1}{n-4}C_n^5$ 个凸四边形。

题6 令

$$D_1=x_1y_1-z_1^2>0,\ D_2=x_2y_2-z_2^2>0,$$

于是有

$$x_1y_1=D_1+z_1^2,\ x_2y_2=D_2+z_2^2.$$

题给的不等式左端的分母可变形为

$$(x_1+x_2)(y_1+y_2)-(z_1+z_2)^2$$

$$
\begin{aligned}
&= D_1 + D_2 + x_1 y_2 + x_2 y_1 - 2z_1 z_2 \\
&= D_1 + D_2 + \frac{x_1}{x_2} x_2 y_2 + \frac{x_2}{x_1} x_1 y_1 - 2z_1 z_2 \\
&= D_1 + D_2 + \frac{x_1}{x_2}(D_2 + z_2^2) + \frac{x_2}{x_1}(D_1 + z_1^2) - 2z_1 z_2 \\
&= D_1 + D_2 + \left(\frac{x_1}{x_2} D_2 + \frac{x_2}{x_1} D_1 - 2\sqrt{D_1 D_2}\right) \\
&\qquad + 2\sqrt{D_1 D_2} + \left(\frac{x_1}{x_2} z_2^2 + \frac{x_2}{x_1} z_1^2 - 2z_1 z_2\right) \\
&= (\sqrt{D_1} + \sqrt{D_2})^2 + \left(\sqrt{\frac{x_1}{x_2} D_2} - \sqrt{\frac{x_2}{x_1} D_1}\right)^2 \\
&\qquad + \left(\sqrt{\frac{x_1}{x_2}}\, z_2 - \sqrt{\frac{x_2}{x_1}}\, z_1\right)^2 \geqslant (\sqrt{D_1} + \sqrt{D_2})^2.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

因此有

$$
\frac{8}{(x_1 + x_2)(y_1 + y_2) - (z_1 + z_2)^2} \leqslant \frac{8}{(\sqrt{D_1} + \sqrt{D_2})^2}. \tag{2}
$$

又因为

$$
\sqrt{D_1} + \sqrt{D_2} \geqslant 2\sqrt[4]{D_1 D_2},
$$

$$
\frac{1}{D_1} + \frac{1}{D_2} \geqslant \frac{2}{\sqrt{D_1 D_2}},
$$

所以

$$
\frac{8}{(\sqrt{D_1} + \sqrt{D_2})^2} \leqslant \frac{2}{\sqrt{D_1 D_2}} \leqslant \frac{1}{D_1} + \frac{1}{D_2}. \tag{3}
$$

由(2),(3)即可得出要证明的不等式。

进而讨论不等式中等号成立的条件．在(1)式中，等号成立的充分必要条件是

$$\sqrt{\frac{x_1}{x_2}D_2}-\sqrt{\frac{x_2}{x_1}D_1}=0,$$

$$\sqrt{\frac{x_1}{x_2}}z_2-\sqrt{\frac{x_2}{x_1}}z_1=0, \tag{4}$$

亦即 $x_1\sqrt{D_2}=x_2\sqrt{D_1}$，$x_1z_2=x_2z_1$， (5)

在(3)式中，等号成立的充分必要条件是

$$D_1=D_2. \tag{6}$$

由(4)、(5)、(6)可知，题中所给不等式中等号成立的充分必要条件是

$$D_1=D_2,\ x_1=x_2,\ z_1=z_2,$$

也就是

$$x_1=x_2,\ y_1=y_2,\ z_1=z_2.$$

第 十 二 届

第十二届国际数学奥林匹克于一九七〇在匈牙利举行。

竞 赛 题

题1　设点M是$\triangle ABC$的AB边上的任一内点，r_1、r_2、r分别是$\triangle AMC$、$\triangle BMC$、$\triangle ABC$的内切圆半径；q_1、q_2、q分别是这些三角形的在$\angle ACM$、$\angle BCM$、$\angle ACB$内的傍切圆半径。试证：

$$\frac{r_1}{q_1}\cdot\frac{r_2}{q_2}=\frac{r}{q}.$$

（波兰）

题2　设a、b、n都是自然数，并且$a>1$、$b>1$、$n>1$；又A_{n-1}和A_n是a进制数，B_{n-1}和B_n是b进制数，并且A_{n-1}、A_n、B_{n-1}和B_n呈现如下形式：

$$A_{n-1}=x_{n-1}x_{n-2}\cdots x_0,\quad A_n=x_nx_{n-1}\cdots x_0,$$

（a进制的位置表示法），

$$B_{n-1}=x_{n-1}x_{n-2}\cdots x_0,B_n=x_nx_{n-1}\cdots x_0$$

（b进制的位置表示法）；

并且$x_n\neq0$，$x_{n-1}\neq0$。试证：当$a>b$时，

$$\frac{A_{n-1}}{A_n}<\frac{B_{n-1}}{B_n}.$$

（罗马尼亚）

题 3 设$\{a_n\}$是具有下列性质的实数列：

$$1=a_0\leqslant a_1\leqslant\cdots\leqslant a_n\leqslant\cdots, \tag{1}$$

而$\{b_n\}$是由下式定义的数列：

$$b_n=\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{a_{k-1}}{a_k}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{a_k}}, \tag{2}$$

$$(n=1,\ 2,\ 3,\cdots).$$

试证：（Ⅰ）$0\leqslant b_n<2, n=1,2,3,\cdots$；

（Ⅱ）对满足 $0\leqslant c<2$ 的任意实数 c，总存在一个满足条件(1)的数列$\{a_n\}$，使得由(2)导出的数列$\{b_n\}$中，有无穷多个下标 n 使 $b_n>c$。

（瑞士）

题 4 找出具有下列性质的一切正整数 n：使集合

$$\{n,\ n+1,\ n+2,\ n+3,\ n+4,\ n+5\}$$

可以分成两个不相交的非空子集合，并且一个子集合中所有元素的积与另一个子集合中所有元素的积相等。

（捷克斯洛伐克）

题 5 设在四面体 $ABCD$ 中，$\angle BDC$ 是直角，D到平面 ABC 的垂线的垂足S是 ΔABC 的垂心，试证：

$$(AB+BC+AC)^2\leqslant 6(AD^2+BD^2+CD^2),$$

并说明等号成立时是一个什么四面体？

（保加利亚）

题 6 在平面内给出了100个点，其中没有三点在一条直线上，考察以上述点为顶点的所有可能的三角形，试证：这些三角形中至多只有70％的三角形是锐角三角形。

（苏联）

题　　解

题1　证法一　设 $\angle CAB=\alpha, \angle ABC=\beta, \angle BCA=\gamma$, $\angle AMC=\delta$；又设 ΔABC 的内切圆的圆心为 R，且与 AB 切于 P（图 12-1）。于是

$$\angle APR=\angle BPR=\frac{\pi}{2},$$

从而有

$$AB=r\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+r\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}=r\left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\right). \quad (1)$$

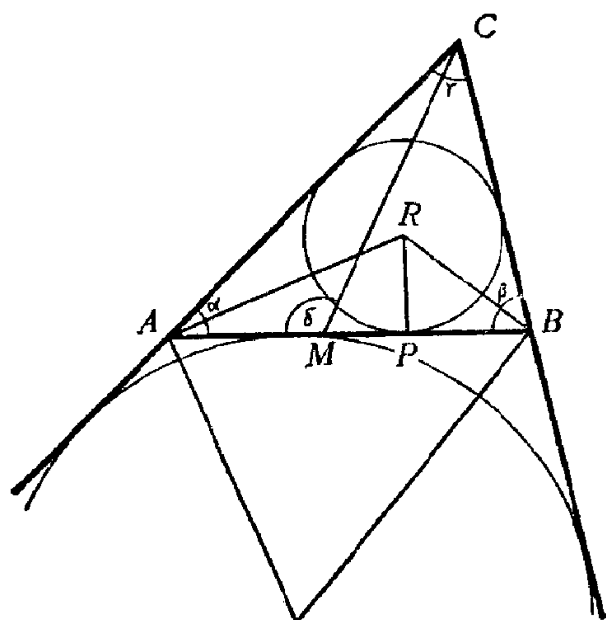


图 12-1

由于三角形的角的内、外分角线互相垂直，因而类似地有

$$AB=q\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+q\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=q\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\right). \quad (2)$$

由(1)和(2)可得

$$\frac{r}{q}=\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}}=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}. \tag{3}$$

类似的结论对于 ΔAMC 和 ΔBMC 也成立，故有

$$\frac{r_1}{q_1}=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\delta}{2}, \tag{4}$$

和
$$\frac{r_2}{q_2}=\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\pi-\delta}{2}=\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{ctg}\frac{\delta}{2}. \tag{5}$$

将(4)、(5)相乘,并利用(3)得

$$\frac{r_1}{q_1}\cdot\frac{r_2}{q_2}=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\delta}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{ctg}\frac{\delta}{2}=$$

$$=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=\frac{r}{q}.$$

证法二　设圆 R 和圆 Q 分别是 ΔABC 的内切圆和 AB 边上的傍切圆,并且分别与边 AB、BC、CA 切于点 P、S、T 和点 P'、S'、T'(图 12-2)。

$\because$ $\Delta ARP\backsim\Delta AQP'$,

$\therefore$ $rq=AP\cdot AP'$.

$\because$ $AP'=\frac{1}{2}(AP'+AT')$

$$=\frac{1}{2}(AB-P'B)+\frac{1}{2}(CT'-AC)$$

$$=\frac{1}{2}(AB-BS')+\frac{1}{2}(CS'-AC)$$

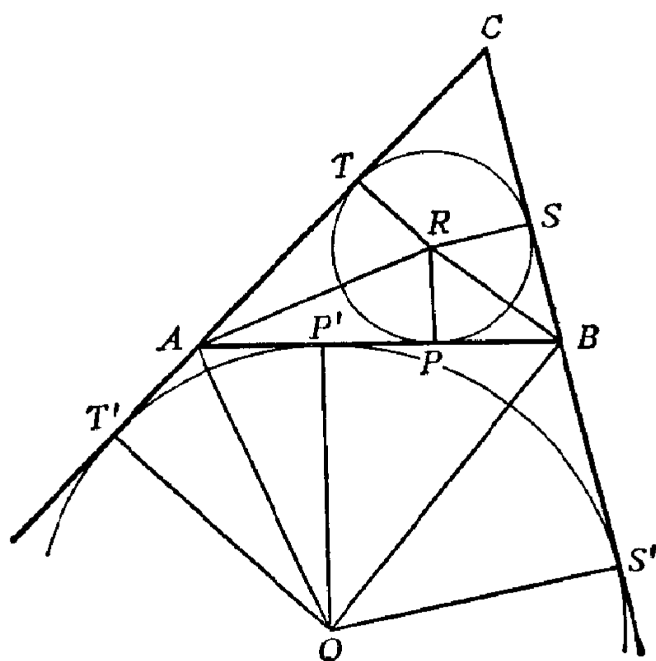


图 12-2

$$=\frac{1}{2}(AB+BC+AC)-AC,$$

$$BP=\frac{1}{2}(BP+BS)$$

$$=\frac{1}{2}(AB-AP)+\frac{1}{2}(BC-CS)$$

$$=\frac{1}{2}(AB-AT)+\frac{1}{2}(BC-CT)$$

$$=\frac{1}{2}(AB+BC+AC)-AC,$$

$\therefore \quad AP'=BP.$

$\therefore \quad rq=AP\cdot BP.$

即 $$\frac{r}{q}=\frac{r^2}{rq}=\frac{r^2}{AP\cdot BP}.$$

同理，设圆 R_1 和圆 R_2 分别是 ΔAMC 和 ΔMBC 的内切圆，并且分别与 AM 和 MB 相切于 P_1 和 P_2（图 12-3），则有

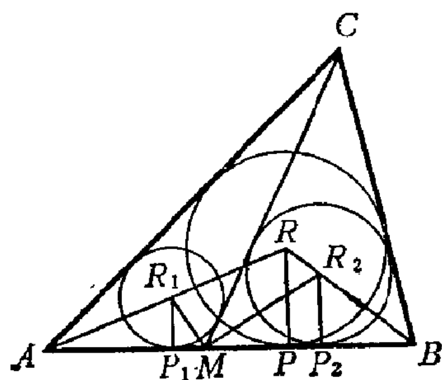


图 12-3

$$\frac{r_1}{q_1}=\frac{r_1^2}{AP_1\cdot MP_1},$$

$$\frac{r_2}{q_2}=\frac{r_2^2}{MP_2\cdot BP_2},$$

$$\therefore\quad \frac{r_1}{q_1}\cdot\frac{r_2}{q_2}=\frac{r_1}{AP_1}\cdot\frac{r_1}{MP_1}\cdot\frac{r_2}{MP_2}\cdot\frac{r_2}{BP_2},$$

$\because\quad \Delta AR_1P_1\backsim\Delta ARP,$

$\Delta BR_2P_2\backsim\Delta BRP,$

$\Delta R_1P_1M\backsim\Delta MP_2R_2,$

$$\therefore\quad \frac{r_1}{AP_1}=\frac{r}{AP},\quad \frac{r_2}{BP_2}=\frac{r}{BP},\quad \frac{r_2}{MP_2}=\frac{MP_1}{r_1}$$

$$\therefore\quad \frac{r_1}{q_1}\cdot\frac{r_2}{q_2}=\frac{r}{AP}\cdot\frac{r_1}{MP_1}\cdot\frac{MP_1}{r_1}\cdot\frac{r}{BP}$$

$$=\frac{r^2}{AP\cdot BP}=\frac{r}{q}.$$

题2 证法一　因为

$$A_{n-1}=x_{n-1}a^{n-1}+x_{n-2}a^{n-2}+\cdots+x_1a+x_0,$$

$$A_n=x_na^n+x_{n-1}a^{n-1}+\cdots+x_1a+x_0$$

并且 $a>1$，所以

$$\frac{A_{n-1}}{A_n}=1-\frac{x_na^n}{x_na^n+x_{n-1}a^{n-1}+\cdots+x_1a+x_0}$$

$$=1-\frac{x_n}{x_n+x_{n-1}\frac{1}{a}+\cdots+x_1\frac{1}{a^{n-1}}+x_0\frac{1}{a^n}};$$

同理

$$\frac{B_{n-1}}{B_n}=1-\frac{x_n}{x_n+x_{n-1}\frac{1}{b}+\cdots+x_1\frac{1}{b^{n-1}}+x_0\frac{1}{b^n}},$$

又因为 $a>b>1$ 即 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$，并且 $x_n\neq0, x_{n-1}\neq0$，所以

$$x_n+x_{n-1}\frac{1}{a}+\cdots+x_1\frac{1}{a^{n-1}}+x_0\frac{1}{a^n}$$

$$<x_n+x_{n-1}\frac{1}{b}+\cdots+x_1\frac{1}{b^{n-1}}+x_0\frac{1}{b^n},$$

从而

$$\frac{x_n}{x_n+x_{n-1}\frac{1}{a}+\cdots+x_1\frac{1}{a^{n-1}}+x_0\frac{1}{a^n}}$$

$$>\frac{x_n}{x_n+x_{n-1}\frac{1}{b}+\cdots+x_1\frac{1}{b^{n-1}}+x_0\frac{1}{b^n}},$$

于是

$$\frac{A_{n-1}}{A_n}<\frac{B_{n-1}}{B_n}.$$

证法二　设

$$p(x)=\sum_{k=0}^{n-1}x_k\cdot x^k,\quad q(x)=p(x)+x_n\cdot x^n,$$

$$f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}.$$

于是 $f(a)=\frac{A_{n-1}}{A_n}$，$f(b)=\frac{B_{n-1}}{B_n}$.

由此可见，若能证明函数 $y=f(x)$ 是单调下降函数，则命题获证.

因为

$$f'(x)=\{p'(x)q(x)-p(x)q'(x)\}/[q(x)]^2$$
$$=\{p'(x)[p(x)+x_n\cdot x^n]-p(x)[p'(x)+nx_nx^{n-1}]\}/[q(x)]^2$$
$$=\{x_nx^{n-1}[xp'(x)-np(x)]\}/[q(x)]^2=$$
$$=\left\{x_nx^{n-1}\left[\sum_{k=1}^{n-1}kx_kx^k-\sum_{k=o}^{n-1}nx_kx^k\right]\right\}/[q(x)]^2$$
$$=\left\{x_nx^{n-1}\left[\sum_{k=1}^{n-1}x^kx_k(k-n)-nx_o\right]\right\}/[q(x)]^2,$$

并且，$x_n>0$，$x_{n-1}>0$，$n>0$，$k-n>0$，$x_k\geqslant 0(k=0,1,\cdots,n-2)$，$[q(x)]^2>0$，所以当 $x>0$ 时，$f'(x)<0$，也就是说，此时函数 $y=f(x)$ 是严格递降的.

因为 $a>b>0$，所以 $f(a)<f(b)$，即

$$\frac{A_{n-1}}{A_n}<\frac{B_{n-1}}{B_n}.$$

题 3 （I） 由于和式(2)的每一项都是非负的，所以 $b_n\geqslant 0(n=1,2,3,\cdots)$.另一方面，

$$b_n=\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{a_{k-1}}{a_k}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{a_k}}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_{k-1}}{\sqrt{a_k}}\left(\frac{1}{a_{k-1}}-\frac{1}{a_k}\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_{k-1}}{\sqrt{a_k}}\left(\frac{1}{\sqrt{a_{k-1}}}+\frac{1}{\sqrt{a_k}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{a_{k-1}}}-\frac{1}{\sqrt{a_k}}\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\sqrt{a_{k-1}}}{\sqrt{a_k}}+\frac{a_{k-1}}{a_k}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{a_{k-1}}}-\frac{1}{\sqrt{a_k}}\right)$$

$$\leqslant\sum_{k=1}^{n}2\left(\frac{1}{\sqrt{a_{k-1}}}-\frac{1}{\sqrt{a_k}}\right)$$

$$=2\left(\frac{1}{\sqrt{a_o}}-\frac{1}{\sqrt{a_n}}\right)<2,\ (n=1,2,3,\cdots)$$

这就证明了

$$0\leqslant b_n<2,\ (i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots).$$

(Ⅱ) 设 $0\leqslant c<2$。

为了找出一个数列$\{a_n\}$，使得由它导出的数列$\{b_n\}$具有题中所要求的性质，我们从比较简单的等比数列入手。

首先，考虑到条件(2)中含有根号，故我们设

$$a_k=a^{-2k},\ k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots;$$

再考虑到条件(1)，故应该这样来取 a，使

$$0<a<1, \tag{3}$$

于是 $$b_n=\sum_{k=1}^{n}(1-a^2)a^k$$

$$=a(1+a)(1-a)\sum_{k=1}^{n}a^{k-1}$$

$$=a(1+a)(1-a^n).$$

其次，考虑到要求有无穷多个下标 n 使 $b_n>c$，故我们设法找出一个自然数N，使得当 $n>N$ 时，恒有 $b_n>c$。由于

$$b_n=a(1+a)(1-a^n)\geqslant a(1+a)(1-a^N)>c,$$

即 $$a^N<1-\frac{c}{a(1+a)},$$

并且 $a>0$，所以还应该这样来取 a，使

$$\frac{c}{a(1+a)}<1,$$

即 $$a(1+a)>c. \quad (4)$$

满足(3)、(4)的 a 是存在的．事实上，因为 $0\leqslant c<2$，所以 $0\leqslant\frac{c}{2}<1$。从而若取 a 使$\sqrt{\frac{c}{2}}<a<1$，则有 $0<a<1$ 并且

$$a(1+a)>a(a+a)=2a^2>c$$

综上所述可知，若取

$$a_n=a^{-2n},（其中\sqrt{\frac{c}{2}}<a<1),$$

则数列$\{a_n\}$满足条件(1)和(2)；并且，由于 $\lim\limits_{n\to+\infty}a^n=0$，故存在一个自然数$N$，使得当 $n>N$ 时，

$$a^n<a^N<1-\frac{c}{a(1+a)},$$

即 $$b_n=a(1+a)(1-a^n)\geqslant a(1+a)(1-a^N)>c.$$

题 4 我们证明：具有题中所述性质的正整数 n 是不存在的．

用反证法．

假设正整数 n 具有所述性质．于是六个自然数

$$n,\ n+1,\ n+2,\ n+3,\ n+4,\ n+5$$

中，某个数的素因数也一定是其余五个数中某个数的素因数。

由于这是六个连续的自然数，因而这六个数中至少有两个数含有素因数2，也至少有两个数含有素因数3。又由于六个连续的自然数中至少有一个能被5整除，因而由题意可知，这六个数中至少有两个数含有素因数5。进而又可知，含有素因数5的两个数只能是n和$n+5$，因为，不然的话，例如，设5是$n+1$的因数，于是$n\equiv4(\mathrm{mod}5)$，$n+2\equiv1(\mathrm{mod}5)$，$n+3\equiv2(\mathrm{mod}5)$，$n+4\equiv3(\mathrm{mod}5)$，$n+5\equiv4(\mathrm{mod}5)$，这样，这六个数中就只能有一个数被5整除。

再来证明：除素数2、3、5外，这六个数不能再含有其他的素因数。因为，如果素数$p(p\geqslant7)$是这六个数中某一个的因数，例如设p是$n+1$的因数，于是$n\equiv p-1(mod p)$，$n+2\equiv1(\mathrm{mod}p)$，$n+3\equiv2(\mathrm{mod}p)$，$n+4\equiv3(\mathrm{mod}p)$，$n+5\equiv4(\mathrm{mod}p)$这样，这六个数中就只能有一个被$p$整除，此与题设矛盾。

由此可知，数

$$n+1,\ n+2,\ n+3,\ n+4,$$

的素因数只能是2和3。由于这是四个连续的自然数，因而其中只能有两个奇数，并且它们一定是3的幂。然而这是不可能的，因为，一方面四个连续自然数中两个奇数的差应该等于2（或-2），另一方面两个3的幂之差

$$3^k-3^m,\ k>1,\ m>1$$

决不会等于2（或-2）。

这就证明了我们的论断。

题5 由题意知$DS\perp$平面ABC，$BS\perp AC$，故由三垂线定理可得$DB\perp AC$；又因$\angle BDC$是直角，即$BD\perp DC$，故

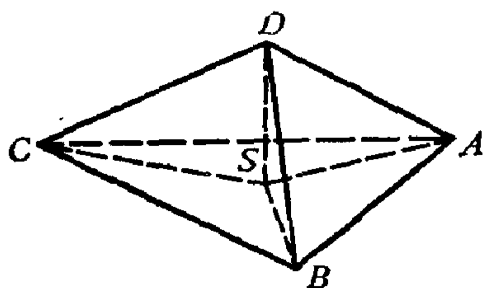


图 12-4

知 $DB\perp$平面 ADC，从而 $DB\perp AD$，即 $\angle ADB$ 是直角。

同理可证，$\angle ADC$ 是直角。

再由勾股定理可得

$$AD^2+BD^2=AB^2,$$
$$BD^2+CD^2=BC^2,$$
$$AD^2+CD^2=AC^2,$$

于是有

$$\begin{aligned}6(AD^2+BD^2+CD^2)&=3[(AD^2+BD^2)\\&\quad+(BD^2+CD^2)+(CD^2+AD^2)]\\&=3(AB^2+BC^2+AC^2). \qquad (8)\end{aligned}$$

又因为

$$2AB\cdot BC\leqslant AB^2+BC^2,\ 2BC\cdot AC\leqslant BC^2+AC^2,$$
$$2AC\cdot AB\leqslant AC^2+AB^2,$$

所以

$$\begin{aligned}(AB+BC+AC)^2&=AB^2+BC^2\\&\quad+AC^2+2AB\cdot BC+2BC\cdot AC+2AC\cdot AB\\&\leqslant 3(AB^2+BC^2+AC^2). \qquad (9)\end{aligned}$$

由(8)、(9)可得我们要证明的不等式：

$$(AB+BC+AC)^2\leqslant 6(AD^2+BD^2+CD^2). \qquad (10)$$

(10)中等式当且仅当 $AB=BC=AC$ 时成立，这时在四面体 $ABCD$ 中，$\triangle ABC$ 是正三角形，并且 $\angle BDC=\angle ADB=\angle ADC=\frac{\pi}{2}$。这种四面体确实是存在的，因为用以下方法可作出这种四面体：在边长为 a 的正三角形 ABC 的垂心 S

上引平面 ABC 的垂线 DS，使 DS 的长 $h=\frac{a}{\sqrt{6}}$，于是

$$AD^2+BD^2=BD^2+CD^2=CD^2+AD^2$$

$$=2\left(h^2+\frac{a^2}{3}\right)=2\left(\frac{a^2}{6}+\frac{a^2}{3}\right)=a^2,$$

从而 $\qquad \angle ADB=\angle BDC=\angle ADC=\frac{\pi}{2}.$

题 6 设 M 是一个平面有限点集，其中没有三点在一条直线上，以 M 中的点为顶点所构成的三角形总数记为 $g(M)$，其中锐角三角形总数记为 $S(M)$.

首先证明：如果 $\frac{S(M)}{g(M)}\leqslant a$，那么，将点集 M 再添加一点得出点集 M' 后仍有 $\frac{S(M')}{g(M')}\leqslant a$.

设点集 M' 由 $n+1$ 个点 A_1、A_2、…、A_{n+1} 所组成，将从 M' 中去掉点 A_i 所得到的点集记为 $M_i\ (i=1,2,\cdots,n+1)$. 因为在和

$$g(M_1)+g(M_2)+\cdots+g(M_{n+1})$$

中每个三角形重复计算了 $n-2$ 次，所以应有

$$g(M')=\frac{g(M_1)+g(M_2)+\cdots+g(M_{n+1})}{n-2},$$

类似地

$$S(M')=\frac{S(M_1)+S(M_2)+\cdots+S(M_{n+1})}{n-2}.$$

由假设知

$$S(M_i)\leqslant ag(M_i),\ (i=1,2,\ \cdots,\ n+1),$$

从而有 $$\frac{S(M_1)+S(M_2)+\cdots+S(M_{n+1})}{n-2}$$

$$\leqslant a\frac{g(M_1)+g(M_2)+\cdots+g(M_{n+1})}{n-2},$$

即 $$S(M')\leqslant ag(M').$$

这就证明了我们的论断.

再者,对于由四点构成的点集N(其中没有三点在一直线上),以N中的点为顶点所构成的三角形总数为

$$g(N)=C_4^3=4,$$

并且这四个三角形中至少有一个不是锐角三角形,因而$S(N)\leqslant 3$。从而

$$\frac{S(N)}{g(N)}\leqslant\frac{3}{4}=0.75.$$

利用上面的论断进而可知,对于由五点构成的点集N'(其中没有三点在一直线上),有

$$\frac{S(N')}{g(N')}\leqslant 0.75.$$

因为$g(N')=C_5^3=10$,所以

$$S(N')\leqslant 7.5.$$

因为$S(N')$是整数,所以

$$S(N')\leqslant 7.$$

也就是

$$\frac{S(N')}{g(N')}=\frac{S(N')}{10}\leqslant 0.7.$$

再利用数学归纳法以及上面证明的论断,便可得出题中的结论.

第 十 三 届

第十三届国际数学奥林匹克于一九七一年在捷克斯洛伐克举行。

竞 赛 题

题1 设$n(>2)$是自然数，证明下述论断仅对$n=3$和$n=5$成立：对任意实数$a_1, a_2, \cdots, a_n$都有

$$\begin{aligned}&(a_1-a_2)(a_1-a_3)\cdots(a_1-a_n)\\&+(a_2-a_1)(a_2-a_3)\cdots(a_2-a_n)\\&+\cdots\cdots+\\&+(a_n-a_1)(a_n-a_2)\cdots(a_n-a_{n-1})\geqslant 0.\end{aligned}$$

（匈牙利）

题2 设凸多面体P_1有九个顶点$A_1, A_2, A_3, \cdots, A_9$。多面体$P_i$是从$P_1$通过平移$A_1 \to A_i$而得到的多面体（$i=1,2,\cdots,9$）。试证：多面体$P_1, P_2, \cdots, P_9$中至少有两个多面体有公共的内点。

（苏联）

题3 证明：数列

$$\{2^n-3\},\ n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots$$

至少含有一个无穷子数列，其中的项两两互素。

（波兰）

题 4 设四面体 $ABCD$ 的各面都是锐角三角形，我们考察一切闭合折线 $XYZTX$，其中 X、Y、Z、T 分别是棱 AB、BC、CD、DA 的内点，试证：

（Ⅰ）如果

$$\angle DAB+\angle BCD\neq\angle ABC+\angle CDA,$$

那么这些闭合折线中没有最短线；

（Ⅱ）如果

$$\angle DAB+\angle BCD=\angle ABC+\angle CDA,$$

那么这些闭合折线中有无穷多条最短线，并且它们的长度等于

$$2AC\sin\frac{\alpha}{2},$$

其中 $\alpha=\angle BAC+\angle CAD+\angle DAB$。

（荷兰）

题 5 证明：对于每个自然数 m，在平面内存在具有下述性质的有限非空点集 S，使 S 中的每一点 A，在 S 中有且仅有 m 个点到点 A 的距离为 1．

（保加利亚）

题 6 设

$$A=(a_{ij}),\ i,j=1,2,\cdots,n$$

是一个元素为非负整数的矩阵，并且此矩阵具有下述性质：如果某一 $a_{ij}=0$，那么对此 i 和 j 有

$$a_{i1}+a_{i2}+\cdots+a_{in}+a_{1j}+a_{2j}+\cdots+a_{nj}\geqslant n.$$

试证：此矩阵的全部元素之和不小于 $\frac{1}{2}n^2$。

（瑞典）

题　　解

题1　当 $n=3$ 时，由于

$$(a_1-a_2)(a_1-a_3)+(a_2-a_1)(a_2-a_3)$$
$$+(a_3-a_1)(a_3-a_2)$$
$$=\frac{1}{2}\{[(a_1-a_2)(a_1-a_3)+(a_2-a_1)(a_2-a_3)]$$
$$+[(a_2-a_1)(a_2-a_3)+(a_3-a_1)(a_3-a_2)]$$
$$+[(a_3-a_1)(a_3-a_2)+(a_1-a_3)(a_1-a_2)]\}$$
$$=\frac{1}{2}[(a_1-a_2)^2+(a_2-a_3)^2+(a_3-a_1)^2]\geqslant 0,$$

因而论断成立。

当 $n=5$ 时，由于

$$(a_1-a_2)(a_1-a_3)(a_1-a_4)(a_1-a_5)$$
$$+(a_2-a_1)(a_2-a_3)(a_2-a_4)(a_2-a_5)$$
$$+(a_3-a_1)(a_3-a_2)(a_3-a_4)(a_3-a_5)$$
$$+(a_4-a_1)(a_4-a_2)(a_4-a_3)(a_4-a_5)$$
$$+(a_5-a_1)(a_5-a_2)(a_5-a_3)(a_5-a_4) \qquad (1)$$

是关于 a_1,a_2,a_3,a_4,a_5 的对称式，故不妨假设 $a_1\geqslant a_2\geqslant a_3\geqslant a_4\geqslant a_5$。于是

$$a_1-a_2=-(a_2-a_1)\geqslant 0,$$
$$a_1-a_3\geqslant a_2-a_3\geqslant 0,$$
$$a_1-a_4\geqslant a_2-a_4\geqslant 0,$$
$$a_1-a_5\geqslant a_2-a_5\geqslant 0.$$

从而

$$(a_1-a_2)(a_1-a_3)(a_1-a_4)(a_1-a_5)$$
$$+(a_2-a_1)(a_2-a_3)(a_2-a_4)(a_2-a_5)\geqslant 0。\quad (2)$$

类似地，有

$$(a_4-a_1)(a_4-a_2)(a_4-a_3)(a_4-a_5)$$
$$+(a_5-a_1)(a_5-a_2)(a_5-a_3)(a_5-a_4)\geqslant 0。\quad (3)$$

又因为

$$a_3-a_1\leqslant 0,\quad a_3-a_2\leqslant 0,$$
$$a_3-a_4\geqslant 0,\quad a_3-a_5\geqslant 0,$$

所以

$$(a_3-a_1)(a_3-a_2)(a_3-a_4)(a_3-a_5)\geqslant 0。\quad (4)$$

将(2)、(3)、(4) 相加便可知(1) 非负，即对$n=5$论断成立。

当 $n=4$ 时，取 $a_1=-1, a_2=a_3=a_4=0$，则有

$$(a_1-a_2)(a_1-a_3)(a_1-a_4)$$
$$+(a_2-a_1)(a_2-a_3)(a_2-a_4)$$
$$+(a_3-a_1)(a_3-a_2)(a_3-a_4)$$
$$+(a_4-a_1)(a_4-a_2)(a_4-a_3)=-1<0,$$

即对 $n=4$ 论断不成立。

当 $n>5$ 时，取

$$a_1=a_2=\cdots=a_{i-1}=0,$$
$$a_i=1,$$
$$a_{i+1}=\cdots=a_n=2。$$

其中 $3\leqslant i\leqslant n-2$。则有

$$(a_1-a_2)(a_1-a_3)\cdots(a_1-a_n)$$
$$+\cdots\cdots+$$
$$+(a_i-a_1)(a_i-a_2)\cdots(a_i-a_{i-1})(a_i-a_{i+1})\cdots$$

$$\cdots(a_i - a_n) + \cdots\cdots +$$
$$+ (a_n - a_1)(a_n - a_2)\cdots(a_n - a_{n-1}) = (-1)^{n-i}.$$

于是，当 $n(>5)$ 为奇数时，取 $i = n-3$，有

$$(-1)^{n-i} = (-1)^3 = -1 < 0,$$

当 $n(>5)$ 为偶数时，取 $i = 3$，有

$$(-1)^{n-i} = (-1)^{n-3} = -1 < 0.$$

因此，当 $n>5$ 时，论断不成立。

题2 设在以 A_1 为相似中心，相似比为 2 的位似变换下多面体 P_1 变换成多面体 P'。

首先证明 $P_i \subset P'$ $(i=1,2,\cdots,9)$。

设 X 是多面体 P_i $(2\leqslant i\leqslant 9)$ 的任意一点，并且 X 在平移 $A_i \to A_1$ 下的象是 Y。于是线段 A_1X 和线段 A_iY 的中点重合，记为 Z（图 13-1）。易知，$Y\in P_1$、$A_i\in P_1$，由于 P_1 是凸多面体，故 $Z\in P_1$。另一方面，在上述位似变换下，Z 的象是 X，因而 $X\in P'$。这就证明了 $P_i\subset P'$ $(i=2,3,\cdots,9)$，而 $P_1\subset P'$ 是显然的。

将多面体 P_i 和 P' 的体积分别记为 $\bar{P}_i$ $(i=1, 2, \cdots, 9)$ 和 $\bar{P}'$。于是有

$$\bar{P}_1 = \bar{P}_2 = \cdots = \bar{P}_9,$$

并且

$$\bar{P}' = 2^3\bar{P}_1 = 8\bar{P}_1.$$

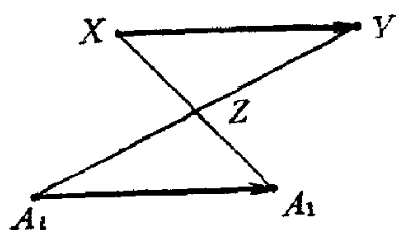


图 13-1

如果，多面体 $P_1, P_2, \cdots, P_9$ 任何两个都没有公共内点，那么，一方面由 $P_i\subset P'$ $(i=1,2,\cdots,9)$ 可知，诸 P_i 的体积之和应不大于 P' 的体积：

$$\bar{P}_1 + \bar{P}_2 + \cdots + \bar{P}_9 = 9\bar{P}_1 \leqslant \bar{P}';$$

另一方面，又有$\bar{P}' = 8\bar{P}_1$。这就得出了矛盾。因此，$P_1, P_2, \cdots, P_9$中至少有两个多面体有公共的内点。

题 3　我们假定下述欧拉(Euler)定理是已知的：对每个整数$n>1$和一切与n互素的正整数a，存在一个正整数$\varphi(n)$，使

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}.$$

利用欧拉函数$\varphi(n)$，我们将所求的子数列$\{2^{n_i}-3\}$归纳定义于下：

① $n_0 = 3$；$n_1 = \varphi(2^{n_0}-3) = \varphi(5) = 4$；

② $$n_{k+1} = \varphi(2^{n_0}-3)\varphi(2^{n_1}-3)\cdots\varphi(2^{n_k}-3) = n_k\varphi(2^{n_k}-3),\quad (k\geqslant 1).$$

首先证明$(2^{n_{k+1}}-3, 2^{n_i}-3) = 1, (i = 0, 1, \cdots, k)$

根据 Euler 定理，有

$$2^{\varphi(2^{n_i}-3)} \equiv 1 \pmod{2^{n_i}-3},\ (0\leqslant i\leqslant k).$$

将上式两端分别乘方可得

$$2^{n_{k+1}} \equiv 1 \pmod{2^{n_i}-3},$$

两端同加-3得

$$2^{n_{k+1}}-3 \equiv -2 \pmod{2^{n_i}-3}.$$

设t为$2^{n_{k+1}}-3$和$2^{n_i}-3$的公因数。则因$2^{n_{k+1}}-3 = -2 + m(2^{n_i}-3)$即$-2 = 2^{n_{k+1}}-3-m(2^{n_i}-3)$，故知$t$是2的因数。因此$t=1$或$t=2$。但是2不是$2^{n_i}-3$的因数。所以必有$t=1$，也就是说$(2^{n_{k+1}}-3,\ 2^{n_i}-3) = 1$。

其次，证明数列$\{2^{n_i}-3\}$是无穷数列。因为$n_0 = 3, n_1 = 4$，并且当$k\geqslant 1$时，$\varphi(2^{n_k}-3>1$，所以$n_{k+1} = n_k\cdot\varphi(2^{n_k}-3) > n_k (k\geqslant 1)$，即$\{2^{n_i}-3\}$是无穷数列。

于是证毕。

注：

① 欧拉函数 $\varphi(n)$

定义　欧拉函数 $\varphi(n)$ 对于所有正整数 n 都有意义，它表示数列

$$0, 1, 2, \cdots, n-1$$

中与 n 互素的数的个数.

例如，$\varphi(1)=1, \varphi(2)=1, \varphi(3)=2, \varphi(5)=4, \cdots$

性质　若 n 的素因数标准分解式为

$$n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$$

（其中 $p_1, p_2, \cdots, p_k$ 是不同的素数，$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$ 是正整数），则

$$\varphi(n)=(p_1^{\alpha_1}-p_1^{\alpha_1-1})(p_2^{\alpha_2}-p_2^{\alpha_2-1})\cdots(p_k^{\alpha_k}-p_k^{\alpha_k-1}).$$

由此可知，当 $n\geqslant 3$ 时，$\varphi(n)>1$.

② 欧拉定理

对每个整数 $n>1$ 和一切与 n 互素的正整数 a，都有

$$a^{\varphi(n)}\equiv 1 \pmod n.$$

证　设 $r_1, r_2, \cdots, r_c$ 为与模 n 互素的非负最小剩余组，其中 $c=\varphi(n)$，则 $ar_1, ar_2, \cdots, ar_c$ 与模 n 互素的非负最小剩余组 $\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_c$ 与组 $r_1, r_2, \cdots, r_c$ 相同，只是排列次序不同而已，故

$$\rho_1\rho_2\cdots\rho_c=r_1r_2\cdots r_c.$$

把同余式

$$ar_i\equiv\rho_i \pmod n \quad (i=1,2,\cdots,c)$$

相乘便得

$$a^c r_1r_2\cdots r_c\equiv\rho_1\rho_2\cdots\rho_c \pmod n,$$

从而有

$$a^{c}\equiv 1(\bmod n),$$

即 $$a^{\varphi(n)}\equiv 1(\bmod n).$$

题4 将四面体 $ABCD$ 沿 $BDAC$ 剪开展成平面图形 $A'D'B'D''B''A''C'$，这里，顶点 A,B,C,D 分别与点 $A'(A'')$，$B'(B'')$，C'，$D'(D'')$对应，在展开图中 ΔADB 重复了一次，因而对应着两个三角形：$\Delta A'D'B'$ 和 $\Delta A''D''B''$。闭折线 $TXYZT$ 在展开图中的对应折线为 $T'X'Y'Z'T''$ 或 $X'Y'Z'T''X''$。

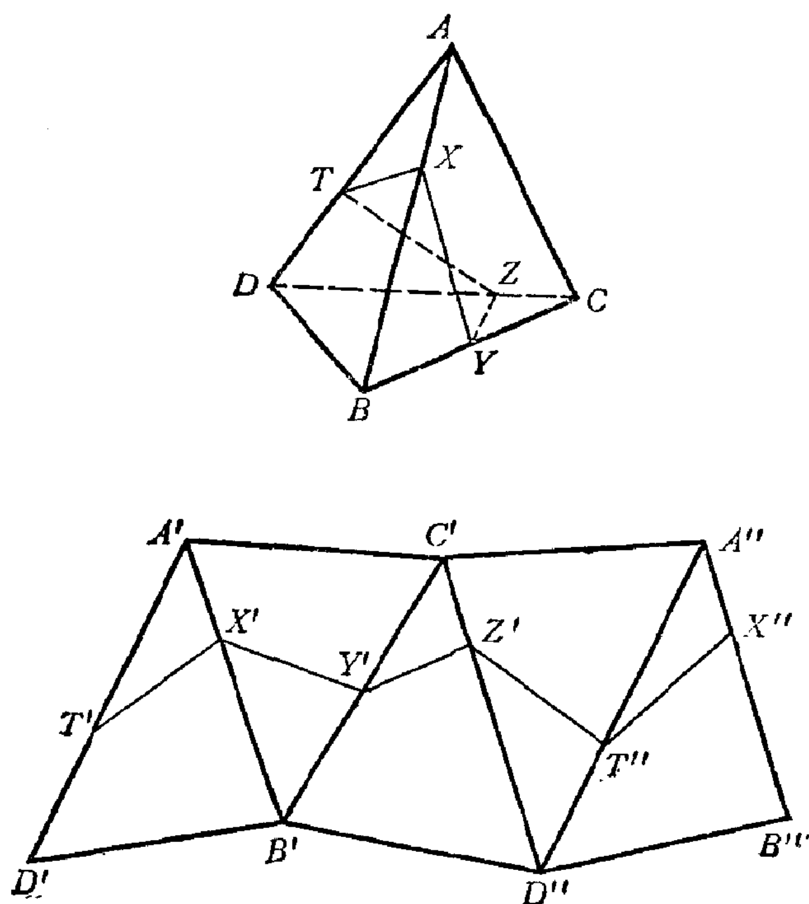


图 13-2

首先证明：四面体 $ABCD$ 有最短闭折线 $XYZTX$ 的必要充分条件是在其展开图中有

$$A'D' \parallel A''D'' \tag{1}$$

必要性 假设闭折线 $XYZTX$ 是最短线，这时必有

$X' \in T'Y'$（即 X'、T'、Y' 共线，余类推），

$$Y' \in X'Z',\ Z' \in Y'T'',\ T'' \in Z'X''. \tag{2}$$

如其不然，比如说，$X' \notin T'Y'$。因为展开图中各个三角形都是锐角三角形，所以四边形 $A'D'B'C'$ 是凸四边形，因而线段 $T'Y'$ 与线段 $A'B'$ 相交于此四边形内部的一点 X_1'，于是由 $X_1' \in T'Y'$ 可知，折线 $X_1'Y'Z'T'X_1'$ 比折线 $X'Y'Z'T'X'$ 更短，这与闭折线 $XYZTX$ 是最短线矛盾。

如果条件(2)成立，从而可得点 T'，X'，Y'，Z'，T''，X'' 在一条直线上。又因为

$$\triangle A'T'X' \cong \triangle A''T''X'',$$

所以 $\angle A'T'X' = \angle A''T''X''$，

进而根据平行线判定定理可知，$A'D' \parallel A''D''$。

充分性 假设条件(1)成立，这时对于每一条折线 $T'X'Y'Z'T''$（其中 $A'T' = A''T''$）有

$$T'X' + X'Y' + Y'Z' + Z'T'' \geqslant TT'' = A'A''$$

$$= 2A'C'\sin\frac{1}{2}\angle A'C'A''.$$

又因为 $A'D' \parallel A''D''$，

所以 $\angle A'C'A'' = \angle D'A'C' + \angle C'A''D''$

$$= \angle CAB + \angle BAD + \angle CAD = \alpha.$$

于是有

$$T'X' + X'Y' + Y'Z' + Z'T'' \geqslant TT'' = 2AC\sin\frac{\alpha}{2}.$$

由此可见，为了证明在条件(1)下有最短折线，只要证明存在这样的点 $T' \in A'D'$ 和 $T'' \in A''D''$，使得 $A'T' = A''T''$，并且，线段 $T'T''$ 与线段 $A'B'$、$B'C'$、$C'D''$ 都相交。

因为四面体的各面都是锐角三角形，那末，$A'D'B'C'$ 和 $A'C'D''B'$ 都是凸四边形，所以它们的内角都小于 $180°$。因此，当 $T'T''$ 与线段 $B'C'$ 相交时，$T'T''$ 必与线段 $A'B'$ 和线段 $C'D''$ 分别相交于点 X' 和点 Z'。又因为线段 $B'C'$ 在平行四边形 $A'D'D''A''$ 的内部，所以只要在 $A'D'$ 上变动 T'(保持 $A'T' = A''T''$)，总可以找到一点 $Y' \in B'C'$(例如，凸四边形 $A'B'D''C'$ 的对角线的交点就是一个这样的点)。这样，就得出一条折线 $T'X'Y'Z'T''$，它的长度为 $2AC\sin\frac{\alpha}{2}$，故是最短线。于是充分性得证。

其次，由上面的证明不难发现，在条件(1)下有无穷多条最短线。因为，当沿着 $A'D'$ 平行移动上面得到的最短线 $T'X'Y'Z'T''$ 时，只要点 T'，X'，Y'，Z'，T'' 分别在线段 $A'D'$，$A'B'$，$C'B'$，$C'D''$，$A''D''$ 内，同样也得出最短线，其长度为 $2AC\sin\frac{\alpha}{2}$。

最后证明：条件(1)与条件

$$\angle DAB + \angle BCD = \angle ABC + \angle CDA$$

是等价的。

设直线 $D'A'$，$B'A'$，$B'C'$，$D''C'$，$D''A''$ 被直线 $T'T''$ 所截(图 13-3)，并且直线 $T'T''$ 与直线 $D'A'$，$B'A'$，$B'C'$，

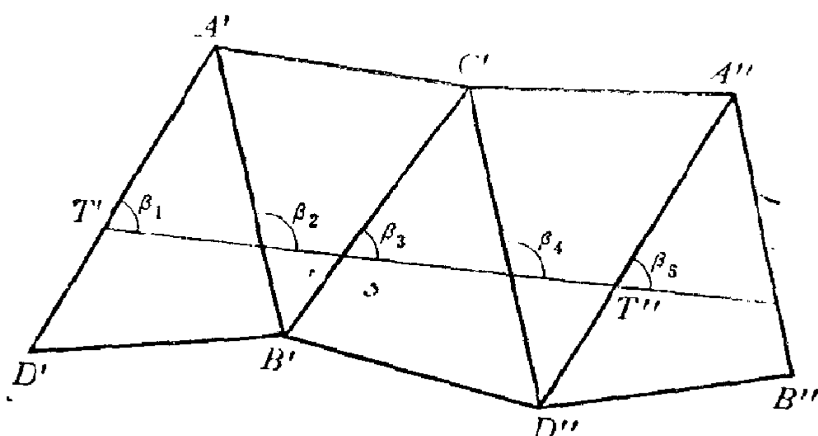


图 13-3

$D''C'$，$D''A''$ 的正方向间的夹角分别为 β_1，β_2，β_3，β_4，β_5。于是，当

$$A'D' \parallel A''D''$$

时，由三角形内角定理可知

$$\angle D'A'B' = \beta_2 - \beta_1, \quad \angle A'B'C' = \beta_2 - \beta_3,$$

$$\angle B'C'D'' = \beta_4 - \beta_3, \quad \angle C'D''A'' = \beta_4 - \beta_5;$$

同时有 $\beta_1 = \beta_5$，所以

$$\angle DAB + \angle BCD = \angle ABC + \angle CDA.$$

反之，由 $\angle DAB + \angle BCD = \angle ABC + \angle CDA$，即可推得 $\beta_1 = \beta_5$，因而 $A'D' \parallel A''D''$。

题 5 我们将对给定的自然数 m 作出一个由 2^m 个点组成的集合 S。为此，首先在平面上考虑具有下述两个性质的矢量集合 $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_m\}$：

1）$|\boldsymbol{u}_i| = \frac{1}{2}$，$(i = 1, 2, \cdots, m)$；

2）当 $c_i \in \{-1, 0, 1\}$ 并且至少有两个 c_i 不为零时 $(1 \leqslant i \leqslant m)$，

$$|c_1\boldsymbol{u}_1+c_2\boldsymbol{u}_2+\cdots+c_m\boldsymbol{u}_m|$$

既不等于0，又不等于$\frac{1}{2}$.这里，$|\boldsymbol{u}|$表示矢量$\boldsymbol{u}$的长度。

上述矢量集合可以用归纳定义来作出：

首先，考虑由下式确定的矢量

$$\boldsymbol{u}_i=\left(\delta_i,\sqrt{\frac{1}{4}-\delta_i^2}\right),0\leqslant\delta_i\leqslant\frac{1}{2},$$

显然，这种矢量满足性质1)。

设$\boldsymbol{u}_1=\left(\delta_1,\sqrt{\frac{1}{4}-\delta_1^2}\right)$中的$\delta_1$已选定，并且$0\leqslant\delta_1\leqslant\frac{1}{2}$.

现在来说明，在区间$0\leqslant\delta_2\leqslant\frac{1}{2}$内一定存在这样的$\delta_2$，使得当取$\boldsymbol{u}_2=\left(\delta_2,\sqrt{\frac{1}{4}-\delta_2^2}\right)$时，$|c_1\boldsymbol{u}_1+c_2\boldsymbol{u}_2|$(其中$c_i\in\{-1,1\},i=1,2$)既不等于0又不等于$\frac{1}{2}$. 事实上，由于

$$|c_1\boldsymbol{u}_1+c_2\boldsymbol{u}_2|^2=(c_1\delta_1+c_2\delta_2)^2+\left(c_1\sqrt{\frac{1}{4}-\delta_1^2}+c_2\sqrt{\frac{1}{4}-\delta_2^2}\right)^2$$

中δ_1已给定，c_1,c_2只能取-1或1，因而只有有限个δ_2，使得

$$|c_1\boldsymbol{u}_1+c_2\boldsymbol{u}_2|=0, \text{或} |c_1\boldsymbol{u}_1+c_2\boldsymbol{u}_2|=\frac{1}{2},$$

因此可以断定必存在一矢量$\boldsymbol{u}_2=\left(\delta_2,\sqrt{\frac{1}{4}-\delta_2^2}\right)$, $0\leqslant\delta_2\leqslant\frac{1}{2}$,使得$|c_1\boldsymbol{u}_1+c_2\boldsymbol{u}_2|$既不等于0，又不等于$\frac{1}{2}$.

今设矢量 $\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\cdots,\boldsymbol{u}_m$ 已经给定，并且满足性质 1) 和性质 2)。我们来说明，必存在一矢量

$$\boldsymbol{u}_{m+1}=\left(\delta_{m+1},\sqrt{\frac{1}{4}-\delta_{m+1}^2}\right),0\leqslant\delta_{m+1}\leqslant\frac{1}{2}.$$

使得当 $c_i\in\{-1,0,1\}$，并且至少有两个 c_i 不为零时$(1\leqslant i\leqslant m+1)$

$$|c_1\boldsymbol{u}_1+c_2\boldsymbol{u}_2+\cdots+c_m\boldsymbol{u}_m+c_{m+1}\boldsymbol{u}_{m+1}|$$

既不等于 0，又不等于$\frac{1}{2}$。

因为 $\boldsymbol{u}_1$，$\boldsymbol{u}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{u}_m$ 都是给定的矢量，并且 $c_i\in\{-1,0,1\}$，所以在区间 $0\leqslant\delta_{m+1}\leqslant\frac{1}{2}$ 内只有有限个 δ_{m-1} 使得

$$|c_1\boldsymbol{u}_1+c_2\boldsymbol{u}_2+\cdots+c_m\boldsymbol{u}_m+c_{m+1}\boldsymbol{u}_{m+1}|=0$$

或

$$|c_1\boldsymbol{u}_1+c_2\boldsymbol{u}_2+\cdots+c_m\boldsymbol{u}_m+c_{m+1}\boldsymbol{u}_{m+1}|=\frac{1}{2}.$$

由此可知，必存在满足性质 1) 和 2) 的矢量 $\boldsymbol{u}_{m+1}$。这样便给出了上面所述的矢量集合。

其次，设点 M_o 为平面上的任意一个固定点，该点的矢径为 $\boldsymbol{r}_o$，又设集合 S 由下述 2^m 个点组成，这些点的矢径为

$$\boldsymbol{r}_o+\alpha_1\boldsymbol{u}_1+\cdots+\alpha_m\boldsymbol{u}_m,$$

$$\alpha_i\in\{-1,1\},\ (i=1,2,\cdots,m).$$

于是，S 中的每一个点 A，对应一个 m 元有序数组$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$。

进而来讨论集合 S 中的点 N 与点 A 间的距离。设点 N 的矢径为

$$\boldsymbol{r}_o+\beta_1\boldsymbol{u}_1+\cdots+\beta_m\boldsymbol{u}_m.$$

分两种情况来讨论：

① 当m元数组$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m)$和$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m)$有两个或两个以上坐标不同时，则点$N$到点$A$的距离为

$$\begin{aligned}&|(\alpha_1-\beta_1)\boldsymbol{u}_1+(\alpha_2-\beta_2)\boldsymbol{u}_2+\cdots+(\alpha_m-\beta_m)\boldsymbol{u}_m|\\&=2|c_1\boldsymbol{u}_1+c_2\boldsymbol{u}_2+\cdots+c_m\boldsymbol{u}_m|\end{aligned}$$

其中$c_i\in\{-1,0,1\}$，并且至少有两个不为零，故由性质2)可知，此时点N到点A的距离既不等于0，又不等于1。

② 当m元数组$(\beta_1,\beta_2\cdots,\beta_m)$和$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$仅有一个坐标不同时，则由性质1）和2）可知，点$N$到点$A$的距离为

$$\begin{aligned}&|(\alpha_1-\beta_1)\boldsymbol{u}_1+(\alpha_2-\beta_2)\boldsymbol{u}_2+\cdots+(\alpha_m-\beta_m)\boldsymbol{u}_m|\\&=2|\boldsymbol{u}_i|=2\cdot\frac{1}{2}=1.\end{aligned}$$

又易知这样的m元数组$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m)$仅有$m$个，从而矢径为$\boldsymbol{r}_o+\beta_1\boldsymbol{u}_1+\cdots+\beta_m\boldsymbol{u}_m$的点$N$也仅有$m$个。

这样就证明了，在S中有且仅有m个点到点A的距离为1。

题6　设p是矩阵$A=(a_{ij})$的行和与列和中最小者。

当$p\geqslant\frac{n}{2}$时，显然矩阵A的全部元素之和S满足下式

$$S\geqslant np\geqslant\frac{1}{2}n^2.$$

当$p<\frac{n}{2}$时，为讨论方便起见，不妨假设矩阵A的第一行各元素的和为p，并且第一行前q列元素都不是0，后$n-q$列元素都是0（$1\leqslant q\leqslant n$）。由题设知

$$a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{1m}+a_{1j}+a_{2j}+\cdots+a_{nj}\geqslant n,$$

$$(j=q+1,\cdots,n).$$

所以 $$\sum_{j=q+1}^{n}(a_{1j}+a_{2j}+\cdots+a_{nj})\geqslant n(n-q)-$$

$$-(a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{1n})(n-q)\geqslant$$

$$\geqslant n(n-q)-p(n-q).$$

这就是说，矩阵A的第 $q+1$ 列至第 n 列的全部元素之和不小于 $n(n-q)-p(n-q)$。另一方面，矩阵A的前 q 列的全部元素之和不小于 pq。于是有

$$S\geqslant n(n-q)-p(n-q)+pq=$$

$$=\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}(n-2p)(n-2q).$$

因为 $p<\frac{n}{2}$，并且矩阵A的元素为非负整数，故在第一行中有

$$\frac{n}{2}>p=a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{1q}\geqslant\underbrace{1+1+\cdots+1}_{q\text{个}}=q,$$

即 $n-2p>0$，$n-2q>0$，从而有

$$S\geqslant\frac{1}{2}n^2.$$

第 十 四 届

第十四届国际数学奥林匹克于一九七二年在波兰举行.

竞 赛 题

题1 已知一个集合由十个互不相同的两位十进整数组成,试证:这个集合必有两个无公共元素的子集合,而这两个子集合中各数之和相等.

(苏联)

题2 证明:对任一自然数 $n\geqslant 4$,下列命题成立:每个有外接圆的四边形,恒可分成 n 个都有外接圆的四边形.

(荷兰)

题3 设 m, n 是任意非负整数,试证:

$$\frac{(2m)!(2n)!}{m!n!(m+n)!}$$

是整数,这里约定 $0!=1$.

(英国)

题4 确定能使不等式组

$$\begin{cases}(x_1^2-x_3x_5)(x_2^2-x_3x_5)\leqslant 0 & (1)\\ (x_2^2-x_4x_1)(x_3^2-x_4x_1)\leqslant 0 & (2)\\ (x_3^2-x_5x_2)(x_4^2-x_5x_2)\leqslant 0 & (3)\\ (x_4^2-x_1x_3)(x_5^2-x_1x_3)\leqslant 0 & (4)\\ (x_5^2-x_2x_4)(x_1^2-x_2x_4)\leqslant 0 & (5)\end{cases}$$

成立的一切解$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$，其中 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 必须是正实数。

（荷兰）

题5 设 f 和 g 是在区间$(-\infty, +\infty)$上定义的实函数，并且所有的 x 和 y 满足等式

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)g(y),$$

试证：若对所有的 x 有

$$|f(x)|\leqslant 1,$$

并且 $f(x)$不恒等于零，则对所有的 y，亦有

$$|g(y)|\leqslant 1.$$

（保加利亚）

题6 已知四个不重合的平行平面，试证：存在一个正四面体，使每个平面上都有该四面体的一个顶点。

（英国）

题　　解

题1 我们知道，元素个数为 n 的集合M共有 2^n 个子集合，其中包括空集合和集合M本身。显然，后两个子集合不满足题中要求的条件，因此，只要考虑其余 2^n-2 个M的子集合。在这里 $n=10$，所以只要考虑 $2^{10}-2=1022$ 个子集合。

设 $M_i\subset M(i=1,2,\cdots,1022)$，并且 M_i 不是空集合，也不是集合M本身，又设 M_i 中各数之和为 s_i。由于集合M是由十个互不相同的两位十进数组成，故知

$$s_i<9\times 99=891,\ (i=1,2,\cdots,1022).$$

从而可知 $s_1, s_2, \cdots, s_{1022}$ 中至少有两个是相等的，也就是

说，至少有两个M的子集合，它们的各数之和相等。不妨假设这两个子集合为 M_1 和 M_2。

为了得到无公共元素的两个子集合，在 M_1, M_2 中分别去掉它们的交集 $M_1 \cap M_2$，即

$$M_1' = M_1 - (M_1 \cap M_2),$$
$$M_2' = M_2 - (M_1 \cap M_2),$$

则 M_1' 和 M_2' 就是符合题意的M的两个子集合。

题 2 设四边形 $ABCD$ 有外接圆(图 14-1)。

图 14-1

当 $n=4$ 时。我们分别在线段 DC 内取一点 A'，线段 AD 内取一点 C'，作四边形 $A'B'C'D$，使点 B' 在 ΔACD 的内部，并且使

$$\angle DA'B' = \angle DAB,$$
$$\angle DC'B' = \angle DCB.$$

于是，四边形 $A'B'C'D$ 与四边形 $ABCD$ 的内角分别对应相等。由于点 B' 可以取得与点D充分靠近，因此，总可以使过点 B' 作 DC 边的平行线交 BC 边于E，过点 B' 作 DA 边的平行线交 AB 边于F。于是四边形 $A'B'C'D, B'ECA'$，$FBEB'$ 和 $AFB'C'$ 就是所求的四个四边形。因为，由四边形 $A'B'C'D$ 和 $FBEB'$ 的内角分别与四边形 $ABCD$ 的内角对应相等可知，这两个四边形有外接圆；又由

$$\angle CA'B' = 180° - \angle DA'B'$$
$$= 180° - \angle DAB = \angle BCD,$$

和 $$\angle AC'B' = 180° - \angle DC'B'$$

$$=180^\circ-\angle BCD=\angle DAB$$

可知，梯形 $B'E'CA'$ 和梯形 $AFB'C'$ 都是等腰梯形，因而这两个四边形也有外接圆。

当 $n\geqslant 5$ 时，应用上述的结果，可以得出一般性的简单解法：将两个等腰梯形中的一个，用平行于底边的平行线分成 $n-3$ 个小的等腰梯形，每个小梯形都有外接圆，于是就将原来的四边形便分成了 n 个四边形，并且每个四边形都有外接圆。

题3 设

$$f(m,n)=\frac{(2m)!(2n)!}{m!n!(m+n)!}.$$

首先证明：当 $n\neq 0$ 时，

$$f(m,n)=4f(m,n-1)-f(m+1,n-1). \tag{1}$$

事实上，

$$4f(m,n-1)-f(m+1,n-1)$$

$$=4\frac{(2m)!(2n-2)!}{m!(n-1)!(m+n-1)!}-\frac{(2m+2)!(2n-2)!}{(m+1)!(n-1)!(m+n)!}$$

$$=\frac{(2m)!(2n-2)!}{m!(n-1)!(m+n-1)!}\left[4-\frac{(2m+2)(2m+1)}{(m+1)(m+n)}\right]$$

$$=\frac{(2m)!(2n-2)!}{m!(n-1)!(m+n-1)}\cdot\frac{4n-2}{m+n}$$

$$=\frac{(2m)!(2n)!}{m!n!(m+n)!}=f(m,n).$$

其次，证明

$$f(m,n)=\sum_{k=0}^{n}C_k f(m+k,0) \tag{2}$$

这里 C_k 是确定的整数。

对 n 用数学归纳法。当 $n=0$ 时，$f(m,0)=f(m+0,0)$，当 $n=1$ 时，由(1)可知

$$f(m,1)=4f(m,0)+(-1)f(m+1,0).$$

故命题对 $n=0,n=1$ 为真；设命题对 $n-1$ 为真，于是由(1)可知

$$\begin{aligned}f(m,n)&=4f(m,n-1)-f(m+1,n-1)\\&=4\sum_{k=0}^{n-1}C_kf(m+k,0)-\sum_{k=0}^{n-1}C_kf(m+1+k,0)\\&=4C_0f(m,0)+4\sum_{k=1}^{n-1}C_kf(m+k,0)\\&\quad-\sum_{k=1}^{n-1}C_{k-1}f(m+k,0)-C_{n-1}f(m+n,0)\\&=4C_0f(m,0)+\sum_{k=1}^{n-1}(4C_k-C_{k-1})f(m+k,0)\\&\quad-C_{n-1}f(m+n,0).\end{aligned}$$

令 $4C_0=C'_0,4C_k-C_{k-1}=C'_k(1\leqslant k\leqslant n-1),-C_{n-1}=C'_n$，

即得 $$f(m,n)=\sum_{k=0}^{n}C'_kf(m+k,0)$$

故命题对 n 为真。

因为在(2)中，

$$f(m+k,0)=\frac{[2(m+k)]!(2\times0)!}{(m+k)!0!(m+k)!}$$

$$=\frac{[2(m+k)]!}{(m+k)!(m+k)!}=C_{2(m+k)}^{m+k}$$

是整数，并且 C_k 亦为整数，故 $f(m,n)$ 为整数，即

$$\frac{(2m)!(2n)!}{m!n!(m+n)!}$$

为整数。

题4 不难验证，当

$$x_1=x_2=x_3=x_4=x_5=a(a\text{ 是正实数}) \quad (6)$$

时，(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) 是不等式组的解。可以证明，不等式组没有其他的解。

如果不等式组有 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 不全相等的解 (x_1, x_2,x_3,x_4,x_5)，即下列条件至少有一个成立：

$$x_1\neq x_3,\ x_3\neq x_5,\ x_5\neq x_2,\ x_2\neq x_4,\ x_4\neq x_1$$

由于经轮换

$$x_1\to x_2\to x_3\to x_4\to x_5\to x_1$$

后，不等式组并不改变，并且，当 (x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) 是不等式组的解时，则 $(x_1^{-1},x_2^{-1},x_3^{-1},x_4^{-1},x_5^{-1})$ 也是不等式组的解，因而不失一般性，可设 $x_3\neq x_5$，并且 $x_3<x_5$。

下面分两种情况来讨论：

① 若 $x_1\leqslant x_2$，则由不等式(1)可知

$$x_1^2-x_3x_5\leqslant 0,\ x_2^2-x_3x_5\geqslant 0,$$

即 $$x_1\leqslant\sqrt{x_3x_5},\ x_2\geqslant\sqrt{x_3x_5}.$$

由于 $x_3<x_5$，故有

$$x_1\leqslant\sqrt{x_3x_5}<x_5 \quad (7)$$

和 $$x_2\geqslant\sqrt{x_3x_5}>x_3. \quad (8)$$

在(7)中，由 $\sqrt{x_3x_5}<x_5$ 可得 $x_3x_5<x_5^2$，又由 $x_1<x_5$ 可得 $x_3x_1<x_3x_5$，即有

$$x_5^2>x_3x_5>x_3x_1.$$

由此可见，在不等式(4)中有

$$x_4^2 \leqslant x_1 x_3 < x_3 x_5. \tag{9}$$

在(8)中，由$\sqrt{x_3 x_5} > x_3$可得$x_3 x_5 > x_3^2$，又由$x_3 < x_2$可得$x_3 x_5 < x_2 x_5$，即有

$$x_3^2 < x_3 x_5 < x_2 x_5.$$

由此可见，在不等式(3)中有

$$x_4^2 > x_5 x_2 > x_3 x_5 \tag{10}$$

这样就得出了两个矛盾的式子(9)和(10)。也就是说，$x_1 \leqslant x_2$不可能。

② 若$x_1 > x_2$，则由不等式(1)可知

$$x_1 \geqslant \sqrt{x_3 x_5} > x_3$$

和

$$x_2 \leqslant \sqrt{x_3 x_5} < x_5,$$

从而可知，$x_3^2 < x_3 x_5$，$x_2^2 \leqslant x_3 x_5$，$x_1^2 \geqslant x_3 x_5$，$x_5^2 > x_3 x_5$，因此在不等式(2)中有

$$x_4 x_1 \leqslant max(x_2^2, x_3^2) \leqslant x_3 x_5 \tag{11}$$

在不等式(5)中有

$$x_2 x_4 \geqslant min(x_5^2, x_1^2) \geqslant x_3 x_5. \tag{12}$$

又由(11)、(12)可知

$$x_2 \geqslant x_1,$$

此与假设$x_1 > x_2$矛盾。

由此可见，不等式组的全部解只能由(6)给出。

题5 用反证法。假设存在一个$y_o(-\infty < y_o < +\infty)$，使

$$|g(y_o)| = 1 + r, \; r > 0.$$

并且设$M = sup f(x)$，由题给条件可得

$$2|f(x)||g(y_o)| = |f(x+y_o) + f(x-y_o)|$$
$$\leqslant |f(x+y_o)| + |f(x-y_o)|$$

$$\leqslant 2M.$$

于是 $\quad |f(x)|\leqslant\frac{M}{|g(y_o)|}=\frac{M}{1+r}=M-\delta,\delta>0.$

但这与 $M=\sup f(x)$矛盾。于是存在一个 y_o，使 $|g(y_o)|>1$ 为不可能，故命题得证。

题6 设已知平面为 E_1, E_2, E_3, E_4，并且在编号中，使平面 E_2, E_3, E_4 依次在平面 E_1 的同一侧。记平面 E_i 与平面 E_{i+1} 间的距离为 $d_i(i=1,2,3)$。这样，问题就归结为：在平面 E_i 内求一点 $P_i(i=1,2,3,4)$，使 $P_1P_2P_3P_4$ 是正四面体。

首先，取一给定的正四面体 $P'_1P'_2P'_3P'_4$。并且依照定比 $d_1:d_2:d_3$ 分线段 $P'_1P'_4$，依次得分点 Q_2 和 Q_3；依照定比 $d_2:d_3$分线段$P'_2P'_4$，得分点R_3；依照定比$d_1:d_2$分线段$P'_1P'_3$，得分点 S_2(图 14-2)。于是有

$$P'_4Q_3:P'_4Q_2=P'_4R_3:P'_4P'_2,$$

从而可知

$$Q_3R_3 /\!/ Q_2P'_2.$$

类似地，由

$$P'_1Q_2:P'_1Q_3=P'_1S_2:P'_1P'_3,$$

可知 $\quad Q_2S_2 /\!/ Q_3P'_3.$

因此过 Q_2、P'_2、S_2 的平面 E'_2、与过 Q_3、R_3、P'_3 的平面 E'_3 平行。

设 E'_1 和 E'_4 分别是过点 P'_1 和 P'_4 且平行于 E'_2 的平面(图 14-3)，过点 P'_4 引平面 E'_1 的垂线交平面 E'_i 于点 T_i $(i=1,2,3)$，记平面 E'_i 与 E'_{i+1} 间的距离为 $t_i(i=1,2,3)$，

于是有

$$t_1:t_2:t_3=P_1'Q_2:Q_2Q_3:Q_3P_4'=d_1:d_2:d_3. \quad (1)$$

由(1)式可知，在空间可作一相似变换将平面 E_1'，E_2'，E_3'，E_4' 分别变换为平面 E_1''，E_2''，E_3''，E_4''，使平面 E_i'' 与平面 E_{i+1}'' 间的距离为 $d_i(i=1,2,3)$，在这相似变换下，正四面体

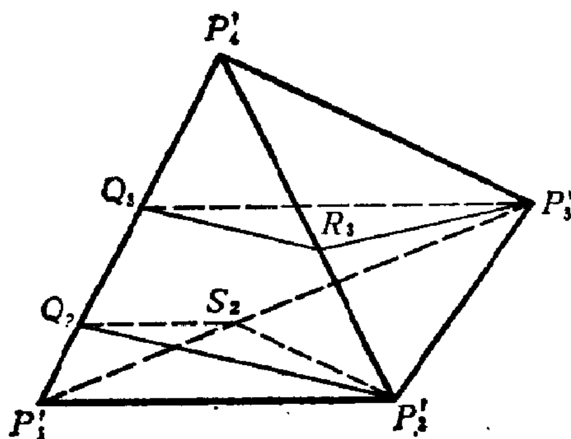


图 14-2

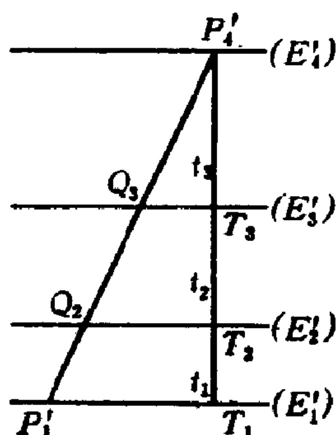


图 14-3

$P_1'P_2'P_3'P_4'$ 变换为正四面体 $P_1''P_2''P_3''P_4''$，并且点 P_i'' 在平面 E_i'' 内$(i=1,2,3,4)$。

最后，移动平面 E_1''，E_2''，E_3''，E_4''使它们分别与平面E_1，E_2，E_3，E_4 重合，于是正四面体$P_1''P_2''P_3''P_4''$ 变换为正四面体 $P_1P_2P_3P_4$，并且 P_i 在平面 E_i 内$(i=1,2,3,4)$。那末，$P_1P_2P_3P_4$ 即为所求的正四面体。

第 十 五 届

第十五届国际数学奥林匹克于一九七三年在苏联举行。

竞 赛 题

题1 设O是直线g上的一点，$\overrightarrow{OP_1}$，$\overrightarrow{OP_2}$，…，$\overrightarrow{OP_n}$都是单位矢量，其中点$P_i(i=1,2,\cdots,n)$都在过直线g的同一个平面上，并且位于直线g的同一侧。证明：当n为奇数时，必有

$$|\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{OP_2}+\cdots+\overrightarrow{OP_n}|\geqslant 1$$

（这里，$|\overrightarrow{OM}|$表示矢量$\overrightarrow{OM}$的长度）。

（捷克斯洛伐克）

题2 试考察，在三维空间中，是否存在具有下述性质的不共面的点的有限集合M：对于任意两点$A,B\in M$，总存在另外两点C，$D\in M$，使得直线AB与直线CD平行但不重合。

（波兰）

题3 设a，b都是实数，并且方程

$$x^4+ax^3+bx^2+ax+1=0$$

至少有一个实数解。试确定

$$a^2+b^2$$

的最小可能值。 （瑞典）

题4 一个战士要探明一个区域的内部或边界上是否埋

有地雷，这个区域的形状是一个正三角形(包括内部及边界)，探测器的效力范围等于这个正三角形高的一半，这个战士从三角形的一个顶点开始探测。问他选择怎样的探测路线才能使探遍整个区域的路程最短？

（南斯拉夫）

题 5 设 G 是形如

$$f(x)=ax+b$$

的函数 f 所组成的非空集合，其中 a,b 都是实数，并且 $a\neq 0$，x 是实变数。又 G 具有下列性质：

（Ⅰ）若 $f,g\in G$，则 $g\circ f\in G$，这里 $g\circ f$ 定义为

$$(g\circ f)(x)=g[f(x)];$$

（Ⅱ）若 $f\in G$，并且 $f(x)=ax+b$，则反函数 f^{-1} 也属于 G，这里

$$f^{-1}(x)=\frac{x-b}{a};$$

（Ⅲ）对每一 $f\in G$，有一 x_f 使得 $f(x_f)=x_f$。试证：总有一个 k，使得对一切 $f\in G$ 有 $f(k)=k$。

（波兰）

题 6 已知 n 个正数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 以及实数 q，其中 $0<q<1$。试给出 n 个实数 $b_1,b_2,\cdots,b_n$，使得

（Ⅰ）对从 1 到 n 的一切 k 有 $a_k<b_k$；

（Ⅱ）对从 1 到 $n-1$ 的一切 k 有 $q<\frac{b_{k+1}}{b_k}<\frac{1}{q}$；

（Ⅲ）$b_1+b_2+\cdots+b_n<\frac{1+q}{1-q}(a_1+a_2+\cdots+a_n)$。

（瑞典）

题　　解

题1　用数学归纳法。

当 $n=1$ 时，命题显然为真。

当 $n\geqslant 3$ 时，不妨设 n 个矢量的端点 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 依次分布在以O 为圆心的半圆 k 上。

假设对一切小于 n 的奇数，命题为真。于是对矢量

$$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OP_2}+\overrightarrow{OP_3}+\cdots+\overrightarrow{OP_{n-1}}$$

来说，有 $|\boldsymbol{a}|\geqslant 1$。

如果 $\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{OP_n}$ 是零矢量，那么显然有

$$|\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{OP_2}+\cdots+\overrightarrow{OP_{n-1}}+\overrightarrow{OP_n}|$$
$$=|\overrightarrow{OP_2}+\cdots+\overrightarrow{OP_{n-1}}|=|\boldsymbol{a}|\geqslant 1.$$

如果 $\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{OP_n}$ 不是零矢量，这时，$\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{OP_n}$ 必是以点O 为始点的矢量，并且在 $\angle P_1OP_n$ 的平分线上；另一方面，矢量 $\boldsymbol{a}$ 也是以点 O 为始点的矢量，并且由 $|\boldsymbol{a}|\geqslant 1$ 可知，矢量 $\boldsymbol{a}$ 必与半圆 k 上的弧 $\overparen{P_2P_{n-1}}$ 相交，这也就是说，矢量 $\boldsymbol{a}$ 在 $\angle P_2OP_{n-1}$ 内，故也在 $\angle P_1OP_n$ 内（图15-1）。由于 $\angle P_1OP_n\leqslant 180°$；并且 $\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{OP_n}$ 在 $\angle P_1OP_n$ 的平分线上，故矢量 $\boldsymbol{a}$ 与矢量 $\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{OP_n}$ 的交角是锐角。从而有

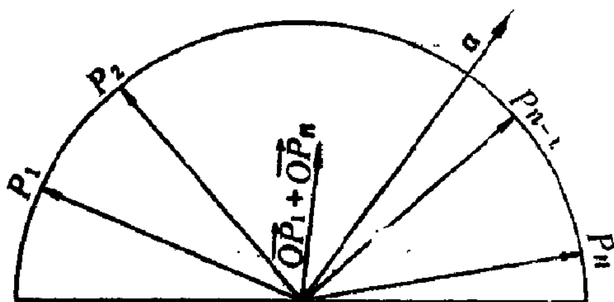


图 15-1

$$|\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{OP_2}+\cdots+\overrightarrow{OP_{n-1}}+\overrightarrow{OP_n}|$$

$$= |\boldsymbol{a} + (\overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_n})| \geqslant |\boldsymbol{a}| \geqslant 1.$$

这就证明了对一切奇数 n 命题为真.

题 2 要说明这种集合的存在性，只要从所有可能的例子中举出其中一个就行了.

一种比较简单的解法如下：取三个相等的长方体，把它们一个挨着一个地排好(图15-2).这样当中一个长方体的八个顶点和两旁两个长方体的中心就组成了满足题设条件的集合.这个集合由10点组成

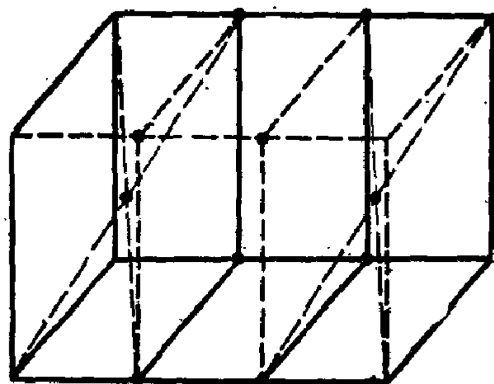


图 15-2

上述方法可以做如下的推广.设 n 为不小于4的任意偶数.在给定的两个平行平面上分别作两个 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 和 $B_1B_2\cdots B_n$，使得 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 有对称中心 P，n 边形 $B_1B_2\cdots B_n$ 有对称中心 Q，并且

$$\overrightarrow{A_iB_i} = \overrightarrow{PQ}\ (i = 1, 2, \cdots, n).$$

再取点 R 和点 S，使

$$\overrightarrow{SO} = \overrightarrow{OR} = \overrightarrow{PQ},$$

其中 O 是线段 PQ 的中点(图 15-3). 于是点集

$$M = \{A_1, A_2, \cdots, A_n;\ B_1, B_2, \cdots, B_n; R, S\}$$

关于点 O 对称.

设 A, B 是集合 M 中的两点.如果线段 AB 不经过 O，那么分别取点 A 和点 B 关于点 O 的对称点作为点 C 和点 D，显然必有 $AB \parallel CD$.如果线段 AB 经过点 O，这时只有下列两种可能情况：

① 点A和点B就是点R和点S。这时，取$C=A_1$，$D=B_1$便有$AB \parallel CD$。

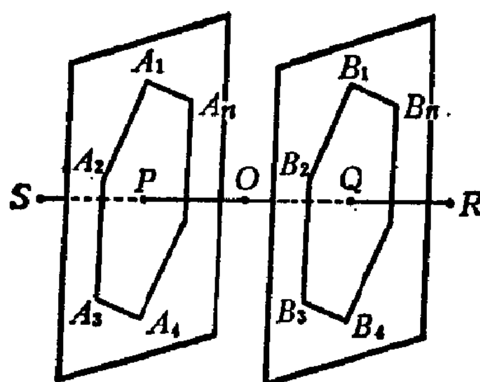


图 15-3

② 点A和点B分别属于集合$\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$和$\{B_1, B_2, \cdots, B_n\}$。不妨假设

$$A \in \{A_1, A_2, \cdots, A_n\}, B \in \{B_1, B_2, \cdots, B_n\}.$$

在多边形$A_1A_2\cdots A_n$中，设点A关于多边形中心P的对称点是A'，于是有

$$\overrightarrow{SA'} = \overrightarrow{SP} + \overrightarrow{PA'} = \overrightarrow{SP} - \overrightarrow{PA} = \overrightarrow{PO} - \overrightarrow{PA} = \overrightarrow{AO},$$

由此可得

$$SA' \parallel AO \parallel AB,$$

因此，取$C=S$，$D=A'$便满足题意。

题3 由于方程

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = o. \tag{1}$$

由数对(a,b)所确定，我们把使方程(1)至少有一个实数解的数对(a,b)组成的集合记为M；把使方程(1)至少有一个正数解的数对(a,b)组成的集合记为N，显然，$N \subset M$，并且设

$$d = \min_{(a,b)\in M}(a^2+b^2), \quad g = \min_{(a,b)\in N}(a^2+b^2).$$

于是问题就转化成计算$d=?$

由$N \subset M$可知，$g \geqslant d$。又因数0不是方程(1)的解，故方程(1)的解或者是正实数，或者是负实数。如果x_0是方程(1)的一个负实数解，那么$-x_0$便是方程

$$x^4-ax^3+bx^2-ax+1=0 \tag{1'}$$

的一个正实数解。而方程(1′)是将方程(1)中的 a 代换成 $-a$ 得到的，并且 $(-a)^2+b^2=a^2+b^2$，由此可知，若 $(a,b)\in M\sim N$，则 $(-a,b)\in N$，从而 $g=d$。因此，我们只要讨论方程(1)的正实数解就行了。

利用代换

$$u=x+\frac{1}{x}, \tag{2}$$

可以把方程(1)变形为方程

$$u^2+au+b-2=0. \tag{3}$$

如果 x_0 是方程(1)的一个正数解，那么必有

$$u_0=x_0+\frac{1}{x_0}\geqslant 2; \tag{4}$$

反之，如果 u_0 是方程(3)的一个解，并且 u_0 满足条件(4)，那么方程

$$x+\frac{1}{x}=u_0,$$

即方程 $\quad x^2-u_0x+1=0 \qquad (5)$

的判别式

$$D=u_0^2-4\geqslant 0,$$

因此方程(5)有实数解，并且由于 $u_0\geqslant 2$，故方程(5)至少有一个正实数解，从而方程(1)对应地至少有一个正实数解。这样一来，我们只要讨论方程(3)的不小于 2 的实数解就行了。

我们把使方程(3)至少有一个不小于 2 的实数解的数对 (a,b) 组成的集合记为 R，于是应有

$$d=\min_{(a,b)\in R}(a^2+b^2).$$

下面分两种情形来讨论函数

$$f(u)=u^2+au+b-2。$$

情形 1　$f(2)\leqslant 0$。

由于　　$\lim\limits_{u\to+\infty} f(u)=+\infty$，

所以根据连续函数中值定理可知，存在一个实数 $u_0\geqslant 2$，使得 $f(u_0)=0$，也就是说，方程(3)有满足条件(4)的解。

我们知道，在笛卡儿坐标平面 oab 内，由条件 $f(2)=2a+b+2\leqslant 0$ 可确定一个半平面(图 15-4)，记为 H，这个半平面应位于直线

$$2a+b+2=0$$

下侧。半平面 H 内的每一点 P 对应一个数对 (a,b)，并且，由这个数对确定的方程

$$u^2+au+b-2=0$$

有不小于 2 的实解数。我们把所有这种数对的集合记为 R_1，显然，R_1 是 R 的一个子集合，即 $R_1\subseteq R$。设

$$d_1=\min_{(a,b)\in R_1}(a^2+b^2)。$$

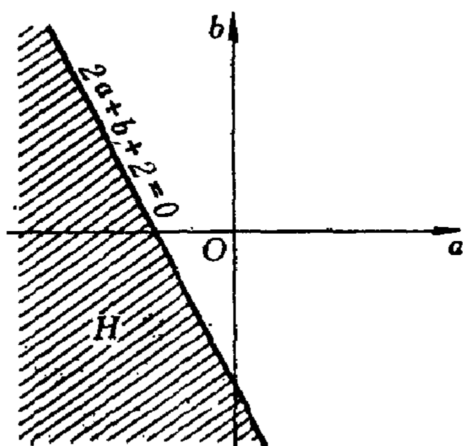


图 15-4

由于 d_1 就是半平面 H 中一切点 (a,b) 到坐标原点 O 的距离平方 a^2+b^2 的最小值，而半平面 H 中一切点到点 0 的距离，以点 0 到它在直线 $2a+b+2=0$ 上的垂足之间的距离为最短，根据点到直线的距离公式可知此时有

$$\sqrt{a^2+b^2}=\frac{|2\times o+1\times o+2|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{2}{\sqrt{5}}。$$

因此 $$d_1=\min_{(a,b)\in R_1}(a^2+b^2)=\frac{4}{5}.$$

情形 2　$f(2)>0$。

此时，如果实数 $u_0\geqslant2$ 使 $f(u_0)=0$，即
$$f(u_0)=u_0^2+au_0+b-2=0,$$
那么必有判别式
$$a^2-4b+8\geqslant0,$$
从而 $$f\left(-\frac{a}{2}\right)=\frac{a^2}{4}-\frac{a^2}{2}+b-2$$
$$=-\frac{1}{4}(a^2-4b+8)\leqslant0.$$
又因为 $f(2)>0$，$f(u_0)=0$，并且 $u_0\geqslant2$，所以
$$-\frac{a}{2}>2，即\ a<-4$$
（图 15-5）。从而
$$a^2+b^2\geqslant a^2>16>\frac{4}{5}=d_1.$$

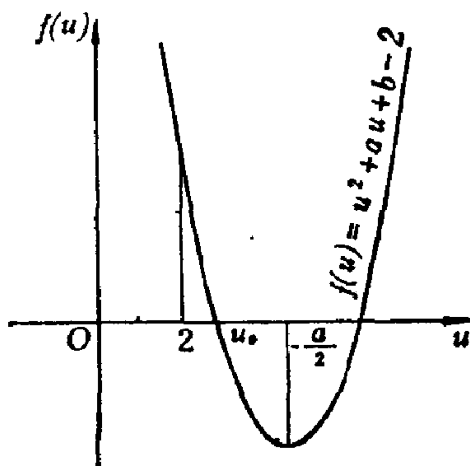


图 15-5

由此可知，如果 $(a,b)\in R\sim R_1$，那么 $a^2+b^2\geqslant d_1$。

于是 $$d=\min_{(a,b)\in M}(a^2+b^2)$$
$$=\min_{(a,b)\in R}(a^2+b^2)$$
$$=\min_{(a,b)\in R_1}(a^2+b^2)$$
$$=\frac{4}{5}.$$

题4 不妨假设这个战士从给定的正三角形 ABC 的顶点 A 出发，并设 ΔABC 的高为 h。

如图 15-6 所示，为了探测点 C 和点 B，探测路线必须经过以点 C 为圆心，以 $\frac{h}{2}$ 为半径的弧 α 上的点 D，以及以点 B 为圆心，以 $\frac{h}{2}$ 为半径的弧 β 上的点 E，因而探测路线为 ADE。因为 $BE=\frac{h}{2}$（定值），所以当路线 $ADEB$ 最短时，路线 ADE 也最短。在路线 $ADEB$ 中，从 A 至 D，从 D 至 E 应取直线，并且 E 应在 DB 上。这样，问题就归结为：在 $CD=\frac{h}{2}$ 的条件下，求 $AD+DB$ 的最小值。

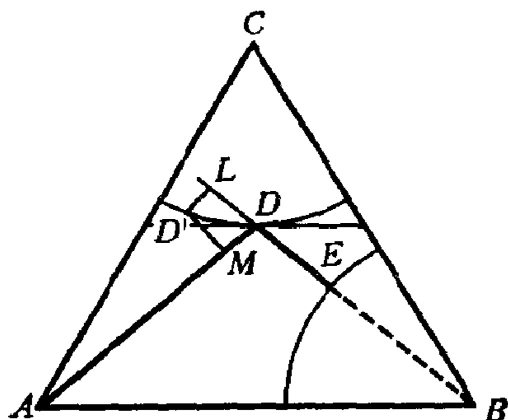


图 15-6

我们来证明，当 D 为 ΔABC 的 AB 边上的高的中点时，$AD+DB$ 最短。

证法一 事实上，如果点 D' 是满足条件的另一点，即有 $CD'=\frac{h}{2}$，为确定起见，不妨设点 D' 离点 A 较近，离点 B 较远。过 D' 分别作 BD，AD 的垂线交 BD，AD 或其延长线于 L，M。由于过点 D 且平行 AB 的直线是 $\angle MDL$ 的平分线，又是弧 α 在点 D 处的切线，故弧 α 上的点 D' 与 BD 延长线上的点 L 必在 $\angle MDL$ 的平分线的同一侧，从而 $LD'<$

$D'M$,又由勾股定理可知,$LD>MD$,即 $LD-MD>0$。于是

$$
\begin{aligned}
&AD'+D'B>AM+LB\\
&=(AD-MD)+(LD+DB)\\
&=(AD+DB)+(LD-MD)>AD+DB.
\end{aligned}
$$

这就证明了 $AD+DB$ 是最短线。

图 15-7

证法二 设点 D' 是满足条件的另一点,即点 D' 在弧 α 上(图 15-7),连接 AD' 和 $D'B$。再以 A、B 为焦点 $\frac{h}{2}$ 为半短轴作椭圆 γ,交 AD' 于点 G。由于点 D' 到 AB 的距离大于 $\frac{h}{2}$,而椭圆的半短轴为 $\frac{h}{2}$,故知点 D' 必在椭圆的外部,即点 G 必在线段 AD' 内部。

在 $\Delta D'GB$ 中有

$$GD'+D'B>GB$$

于是 $\quad AG+GD'+D'B>AG+GB.$

即 $\quad AD'+D'B>AG+GB.$

又根据椭圆的性质可得

$$AG+GB=AD+DB.$$

故 $\quad AD'+D'B>AD+DB.$

这就证明了 $AD+DB$ 是最短线。

下面来说明，沿着路线 ADE 可以探遍整个 $\triangle ABC$ 的内部及边界，设过点 E 且垂直 AB 的直线与 AB、BC 分别交于点 F、G，过路线 ADE 上的任意一点 P 且垂直 AB 的直线分别交 $\triangle ABC$ 的两边于 R，Q(图 15-8)，显然，

$$PR \leqslant CD = \frac{h}{2},$$

$$PQ \leqslant \frac{h}{2}.$$

由此可见，当点 P 沿着路线 ADE 移动时，线段 RQ 将覆盖整个四边形 $AFGC$ 的内部及边界，即战士沿着路线 ADE 可以探遍整个四边形 $AFGC$ 的内部及边界。另一方面，余下的 $\triangle FBG$ 在以 E 为圆心，$\frac{h}{2}$ 为半径的圆内，故战士位于点 E 处可探遍整个 $\triangle FBG$ 的内部及边界。从而也就探遍整个 $\triangle ABC$ 的内部及边界。

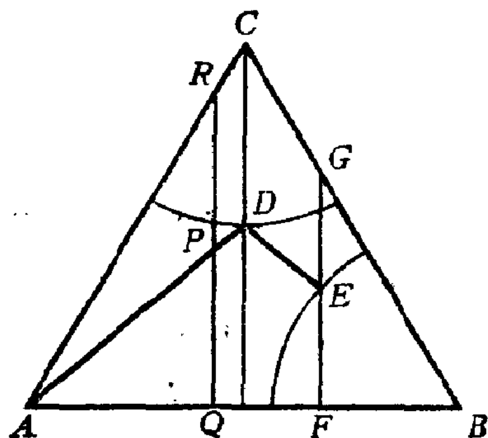


图 15-8

题 5　首先证明：

若　$f(x)=x+b\in G$，则 $b=0$。　　(1)

事实上，由(Ⅱ)可知，有一 x_f 使 $f(x_f)=x_f+b=x_f$，于是 $b=0$。

其次证明：

若　$f(x)=ax+b\in G$，则 b 由 a 唯一确定。　　(2)

事实上，如果 $g_1(x)=ax+b_1$，$g_2(x)=ax+b_2$ 是 G 中的两

个函数，由(a)，(Ⅱ)可知

$$g_1^{-1}[(g_2(x)] = \frac{(ax+b_2)-b_1}{a} = x + \frac{b_2-b_1}{a}$$

也是G中的函数。又由(1)可知$b_1=b_2$。

最后证明：存在一个数k，使得对一切$f(x)=ax+b\in G$恒有$f(k)=k$。事实上，由上面的讨论可知，当$a=1$时，G中的函数$f(x)=x$，显然对一切数k都有$f(k)=k$。再设$m(x)=ax+b$，$n(x)=cx+d$是G中的任意两个函数，并且$a\neq 1$，$c\neq 1$。由(Ⅱ)可知，存在x_m, x_n使

$$ax_m+b=x_m,\quad cx_m+d=x_n$$

即
$$x_m=-\frac{b}{a-1},\quad x_n=-\frac{d}{c-1},$$

又由(Ⅱ)可知，

$$m[n(x)]=acx+ad+b,$$

$$n[m(x)]=acx+bc+d$$

也是G中的函数，并且必有

$$ad+b=bc+d,$$

从而
$$-\frac{b}{a-1}=-\frac{d}{c-1}.$$

因此可得

$$k=x_m=x_n.$$

题6　令

$$b_k=a_1q^{k-1}+\cdots+a_{k-1}q+a_k+a_{k+1}q+\cdots+a_nq^{n-k},$$
$$(k=1, 2, \cdots, n).$$

则恒有$b_k>a_k$。

再者，对于$k=1, \cdots, n-1$，有

$$qb_k - b_{k+1} = a_{k+1}(q^2-1) + \cdots + a_n q^{n-k-1}(q^2-1) < 0$$

以及 $$qb_{k+1} - b_k = a_1 q^{k-1}(q^2-1) + \cdots + a_k(q^2-1) < 0.$$

于是对从 1 到 $n-1$ 的一切 k 有

$$q < \frac{b_{k+1}}{b_k} < \frac{1}{q}.$$

又

$$\begin{aligned} b_1 + b_2 + \cdots + b_n = & a_1 + a_2 q + a_3 q^2 + \cdots + a_n q^{n-1} \\ & + a_1 q + a_2 + a_3 q + \cdots + a_n q^{n-2} \\ & + a_1 q^2 + a_2 q + a_3 + \cdots + a_n q^{n-3} \\ & + \cdots + \\ & + a_1 q^{n-1} + a_2 q^{n-2} + a_3 q^{n-3} + \cdots + a_n < \\ < & (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n) \\ & \cdot (1 + 2q + 2q^2 + \cdots + 2q^{n-1}) \\ = & (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n)\left(2\frac{1-q^n}{1-q} - 1\right) \\ = & (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n)\frac{1+q-2q^n}{1-q} \\ < & (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n)\frac{1+q}{1-q}. \end{aligned}$$

第十六届

第十六届国际数学奥林匹克于一九七四年在德意志民主共和国举行。

竞赛题

题1 A, B, C 三人做游戏：在三张卡片上分别写上整数 $p, q, r(0<p<q<r)$。把这三张卡片混和后分发给 A, B, C，每人各得一张，再按各人所得卡片上的数字，发给各人小弹子。然后，将卡片收回，弹子留给各人。如此进行了两轮以上(每轮包括混和卡片、发卡片、发弹子和收卡片)，最后一轮结束后，A, B, C 分别得到的弹子总数为20，10，9。已知 B 在第一轮得到 r 粒弹子，问哪一个在第一轮得到 q 粒弹子？

(美国)

题2 设 ΔABC 的三个内角分别是 $\angle A=\alpha$，$\angle B=\beta$，$\angle C=\gamma$，试证：当且仅当

$$\sin\alpha\sin\beta\leqslant\sin^2\frac{\gamma}{2}$$

时，在线段 AB 内存在一点 D 使 CD 是 AD 和 BD 的等比中项。

(芬兰)

题3 证明：没有一个自然数 n，能使

$$\sum_{k=0}^{n} C_{2n+1}^{2k+1}\cdot 2^{3k}$$

被 5 整除。

（罗马尼亚）

题 4 把一块 8×8 格的（国际象棋）棋盘分割成 p 个矩形，分割时不能割破棋盘的任何一格（即只能沿棋盘的分格线割开），并且还要满足下面两个条件：

① 每个矩形中含有同样多的白格和黑格；

② 如果第 i 个矩形中白格数为 a_i，那么有

$$a_1 < a_2 < \cdots < a_p.$$

试在所有可能分法中，求出 p 的最大值，并且对这个最大值 p，列出所有可能的数列 $a_1, a_2, \cdots, a_p$。

（保加利亚）

题 5 设 a、b、c、d 是任意正的实变数，问和

$$S=\frac{a}{a+b+d}+\frac{b}{a+b+c}+\frac{c}{b+c+d}+\frac{d}{a+c+d}$$

的值在什么范围内？

（荷兰）

题 6 已知 $p(x)$ 是整系数多项式，并且不是常数，又已知有 $n(p)$ 个整数 k 使得 $[p(k)]^2=1$。试证：

$$n(p)-\deg(p)\leqslant 2,$$

这里，$\deg(p)$ 表示多项式 $p(x)$ 的次数。（瑞典）

题　解

题 1 设游戏共进行了 n 轮。于是

$$n(p+q+r)=20+10+9=39,$$

因为 $0<p<q<r$，可得 $p+q+r\geqslant 6$；又因为 $n\geqslant 2$，而且 39 只能唯一地分解成 3×13，又可得

$$n=3,\ p+q+r=13. \qquad (1)$$

由题意，B 在第一轮得到 r 粒弹子，而且总共得到的弹子数是 $10(<13)$，因此，B 在后两轮中得到的弹子数只能都是 p。于是

$$r+p+p=10. \qquad (2)$$

因为 C 总共得到的弹子数是 $9(<10)$，所以 C 在每一轮中都不能得到 r 粒弹子。

在后两轮中，由于 B 得到的弹子数都是 p，故知 C 得到的弹子数必定都是 q，从而 A 得到的弹子数必定都是 r。

在第一轮中，若 C 得到的弹子数仍为 q，则有

$$q+q+q=9,$$

从而 $q=3$，于是由(1)可得

$$p+r=10. \qquad (3)$$

又由(2)可得 $p=0$，但这与 $p>0$ 矛盾。故知 C 在第一轮中得到的弹子数必定是 p，进而可知第一轮中得到 q 粒弹子的是 A。

注：

① 由 A、B、C 在各轮中得到的弹子数可知

$$\begin{cases} q+2r=20 \\ r+2p=10 \\ p+2q=9 \end{cases}$$

解得 $p=1$，$q=4$，$r=8$。

② 在德文版《国际数学奥林匹克》一书的题解中，将本题

的条件"已知B在第一轮得到r粒弹子"改成了"已知B在最后一轮得到r粒弹子",这时,问题的解法如下:

设游戏共进行了n轮。于是

$$n(p+q+r)=20+10+9=39,$$

因为$0<p<q<r$,故知$p+q+r\geqslant 6$;又因$n\geqslant 2$,而且39只能唯一地分解成3×13,所以

$$n=3,\ p+q+r=13$$

由题设,B在最后一轮得到r粒弹子,而且总共得到的弹子数是$10(<13)$,因此,B在头两轮中得到的弹子数只能都是p。于是

$$p+p+r=10.$$

因为C总共得到的弹子数是$9(<10)$,所以C在每一轮中都不能得到r粒弹子.从上面分析中已经知道,B在第一轮中得到p粒弹子,因之可以断定,在第一轮中得到q粒弹子的是C。

从而,进一步可以推算出A,B,C在各轮中得到的弹子数:由上面的分析已知,B在头两轮中得到的弹子数都是p,并且C没有一轮会得到r粒弹子,故可得出在第一、二轮中,A,B,C分别得到的弹子数是r,p,q.又在最后一轮中,由题意知,B得到r粒弹子,C得到的弹子数只有两种可能:q或p.若C得到q粒弹子,因而A应得到p粒弹子,于是

$$2r+p=20,\ 2p+r=10,\ 3q=9;$$

并且$p+q+r=13$,从而$p=0$,$q=3$,$r=10$。这与$p>0$矛盾.故知C在最后一轮中得到的弹子数必定为p,A在最后一轮中得到的弹子数为q。这时,由

$$2r+q=20,\ 2p+r=10,\ 2q+p=9$$

可解得 $p=1$，$q=4$，$r=8$。

题2 设D是线段AB内的一点，并设

$$\angle ACD=\gamma_1，\angle BCD=\gamma_2。$$

由正弦定理可得

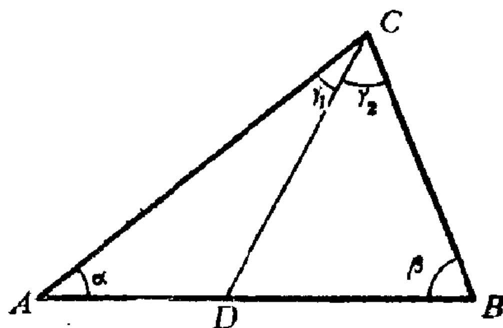


图 16-1

$$CD:DA=\sin\alpha:\sin\gamma_1，$$

$$CD:DB=\sin\beta:\sin\gamma_2。$$

将此两式相乘得

$$\frac{CD^2}{DA\cdot DB}=\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin\gamma_1\sin\gamma_2}.$$

由此可见，当点D使线段CD是线段AD和BD的等比中项时，应有

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta=\sin\gamma_1\cdot\sin\gamma_2，$$

也就是 $$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\gamma_1-\gamma_2)-\cos(\gamma_1+\gamma_2)]。\quad(1)$$

因为 $\gamma_1+\gamma_2=\gamma$，并且 $\cos(\gamma_1-\gamma_2)\leqslant1$，所以

$$\frac{1}{2}[\cos(\gamma_1-\gamma_2)-\cos(\gamma_1+\gamma_2)]\leqslant\frac{1}{2}(1-\cos\gamma)$$

$$=\sin^2\frac{\gamma}{2}，$$

也就是 $$\sin\alpha\sin\beta\leqslant\sin^2\frac{\gamma}{2}。\quad(2)$$

反之，当(2)成立，亦即当

$$\sin\alpha\sin\beta\leqslant\frac{1}{2}(1-\cos\gamma)\quad(3)$$

时，如果找出γ_1,γ_2，并且$0<\gamma_1$.$\gamma_2<\gamma$,$\gamma_1+\gamma_2=\gamma$使得式(1)

成立，那么就可以在线段 AB 内找出一点 D 使 CD 是 AD 和 BD 的等比中项。为此，考虑下式：

$$\cos(\gamma_1-\gamma_2)=2\sin\alpha\sin\beta+\cos\gamma \tag{4}$$

由(3)可知，

$$2\sin\alpha\sin\beta+\cos\gamma\leqslant 1.$$

又因 α，β 是三角形的内角，故 $\sin\alpha>0$，$\sin\beta>0$，并且 $\cos\gamma\geqslant-1$，从而有

$$2\sin\alpha\sin\beta+\cos\gamma\geqslant-1.$$

也就是说

$$-1\leqslant\cos(\gamma_1-\gamma_2)\leqslant 1.$$

因此，可以求得一个 $\delta(0\leqslant\delta\leqslant 180^\circ)$ 使得

$$\cos\delta=2\sin\alpha\sin\beta+\cos\gamma.$$

取 $\gamma_1-\gamma_2=\delta$ 或 $\gamma_2-\gamma_1=\delta$，再根据 $\gamma=\gamma_1+\gamma_2$，可得问题的解为

$$\gamma_1=\frac{\gamma+\delta}{2},\ \gamma_2=\frac{\gamma-\delta}{2}\left(\text{其中}\frac{\gamma}{2}\leqslant\gamma_1<\gamma,0<\gamma_2\leqslant\frac{\gamma}{2}\right),$$

或 $$\gamma_1=\frac{\gamma-\delta}{2},\ \gamma_2=\frac{\gamma+\delta}{2}\left(\text{其中}0<\gamma_1\leqslant\frac{\gamma}{2},\frac{\gamma}{2}\leqslant\gamma_2<\gamma\right).$$

题3 将所给的和记为 x．于是

$$x=\sum_{k=0}^{n}C_{2n+1}^{2k+1}2^{3k}=\sum_{k=0}^{n}C_{2n+1}^{2k+1}8^{k}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}C_{2n+1}^{2k+1}(\sqrt{8})^{2k}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{8}}\sum_{k=0}^{n}C_{2n+1}^{2k+1}(\sqrt{8})^{2k+1} \tag{1}$$

再构造一个和：

$$y=\sum_{k=0}^{n}C_{2n+1}^{2k}(\sqrt{8})^{2k}=\sum_{k=0}^{n}C_{2n+1}^{2k}2^{3k}, \qquad (2)$$

同样 y 也是整数．

将(1)，(2)相加、相减，再利用二项定理可得：

$$\begin{aligned}\sqrt{8}x+y&=\sum_{k=0}^{n}C_{2n+1}^{2k+1}(\sqrt{8})^{2k+1}\\&\quad+\sum_{k=0}^{n}C_{2n+1}^{2k}(\sqrt{8})^{2k}\\&=\sum_{k=0}^{2n+1}C_{2n+1}^{k}(\sqrt{8})^{k}=(\sqrt{8}+1)^{2n+1}; \qquad (3)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sqrt{8}x-y&=\sum_{k=0}^{n}C_{2n+1}^{2k+1}(\sqrt{8})^{2k+1}\\&\quad-\sum_{k=0}^{n}C_{2n+1}^{2k}(\sqrt{8})^{2k}\\&=\sum_{k=0}^{n}C_{2n+1}^{2k+1}(\sqrt{8})^{2k+1}(-1)^{(2n+1)-(2k+1)}\\&\quad+\sum_{k=0}^{n}C_{2n+1}^{2k}(\sqrt{8})^{2k}(-1)^{(2n+1)-2k}\\&=\sum_{k=0}^{2n+1}C_{2n+1}^{k}(\sqrt{8})^{k}(-1)^{(2n+1)-k}\\&=(\sqrt{8}-1)^{2n+1}. \qquad (4)\end{aligned}$$

将(3)、(4)相乘可得

$$8x^2-y^2=(8-1)^{2n+1}=7^{2n+1}. \tag{5}$$

因为

$$8\equiv 3(\mathrm{mod}5),\ 7\equiv 2(\mathrm{mod}5),$$

$$7^2\equiv -1(\mathrm{mod}5), 7^{2n}\equiv(-1)^n(\mathrm{mod}5),$$

所以由(5)可得到一个关于模 5 的同余式

$$3x^2-y^2\equiv 2\cdot(-1)^n(\mathrm{mod}5), \tag{6}$$

即

$$3x^2\equiv y^2+2\cdot(-1)^n(\mathrm{mod}5). \tag{7}$$

又因为

$$0^2\equiv 0(\mathrm{mod}5),\ 1^2\equiv 4^2\equiv 1(\mathrm{mod}5),$$

$$2^2\equiv 3^2\equiv -1(\mathrm{mod}5),$$

又因为对 y 来说只能有下列同余式之一成立：

$$y\equiv 0(\mathrm{mod}5),\ y\equiv 1(\mathrm{mod}5),\ y\equiv 2(\mathrm{mod}5),$$

$$y\equiv 3(\mathrm{mod}5),\ y\equiv 4(\mathrm{mod}5).$$

所以，对 y^2 来说，既不会有

$$y^2\equiv 2(\mathrm{mod}5),$$

也不会有

$$y^2\equiv -2(\mathrm{mod}5).$$

由此可见，在(7)式中不会有

$$3x^2\equiv 0(\mathrm{mod}5),$$

也就是说，和 x 不能被 5 整除。

题 4 由于棋盘中白格共有 32 个(图 16-2)，故有

$$a_1+a_2+\cdots+a_p=32.$$

由条件②知 a_i 是递增的，由条件①知 $a_1\geqslant 1$，因而，对于任一 $i(i=1,2,\cdots,p)$有

$$a_i\geqslant i.$$

由此推出

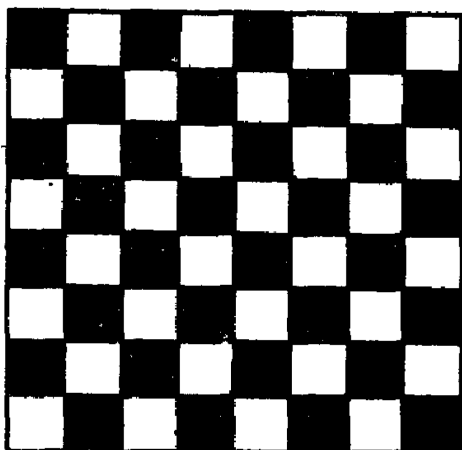


图 16-2

$$32=a_1+a_2+\cdots++a_p$$

$$\geqslant\frac{1}{2}p(p+1).$$

也就是说，

$$p\leqslant 7.$$

这样就估计出 p 的最大值可能是 7。

下面来求由 7 个正整数构成的严格单调递增数列，并且数列的和为 32。为此，注意到

$$1+2+3+4+5+6+7=28. \qquad (1)$$

因而若将数 $32-28=4$ 分成几个正整数之和，再将所得到的正整数适当地加到(1)的右端的某些项中，就可以得到我们要求的递增数列。易知，可能的情况有如下的几种：

	1	2	3	4	5	6	7
Ⅰ							4
Ⅱ						1	3
Ⅲ						2	2
Ⅳ					1	1	2
Ⅴ				1	1	1	1

因此可得出下面几种可能的数列

Ⅰ) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 11;

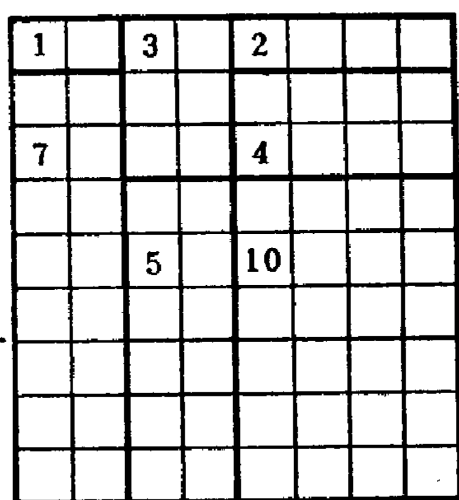
Ⅱ) 1, 2, 3, 4, 5, 7, 10;

Ⅲ) 1, 2, 3, 4, 5, 8, 9;

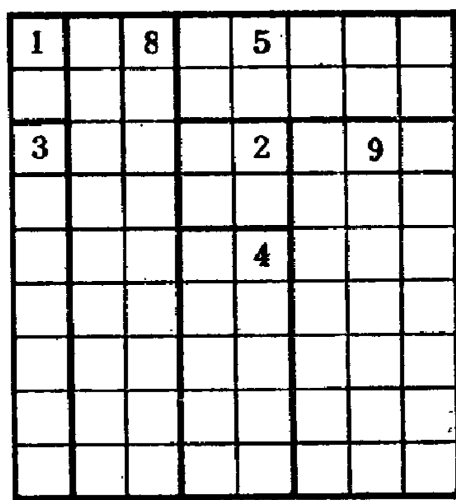
Ⅳ）1，2，3，4，6，7，9；

Ⅴ）1，2，3，5，6，7，8.

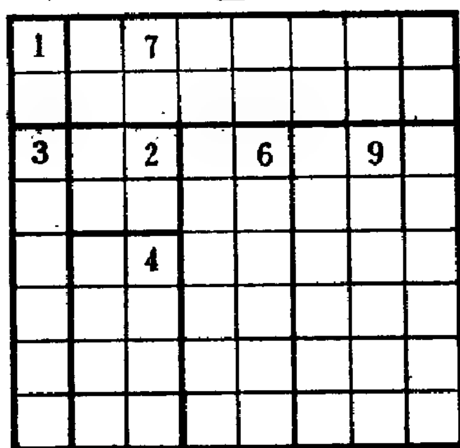
并且可以断定，此外将棋盘分割成七个矩形的其他分割方法，不能满足条件①、②。但在上述五种情形中，情形Ⅰ实际上是不能实现的。因为，根据条件(1)，这时必定有一个矩形含有22格，但是22不能分解成两个不大于8的整数之积，因而，在8×8格棋盘中，这种矩形实际上是不会出现的.



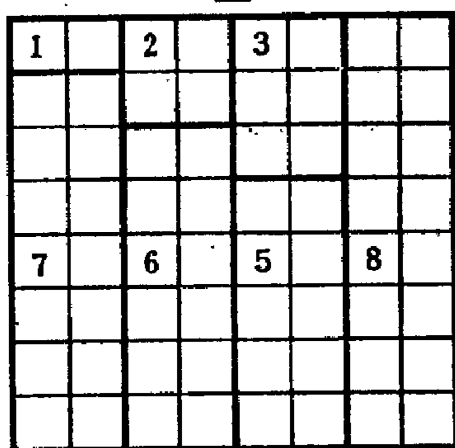
Ⅱ



Ⅲ



Ⅳ



Ⅴ

图 16-3

另一方面，由图 16-3 可知，对应于情形Ⅰ—Ⅴ的分割法是可能的。

综上所述，问题中要求的 p 的最大值是 7，要求的数列是Ⅰ—Ⅴ，图 16-3 分别给出一种可能的分割方法。

题5　将题中所给的表达式的右端记为 $f(a, b, c, d)$。

先大致估计一下 S 的上界和下界。由下面两个不等式

$$f(a,b,c,d)<\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a+b}+\frac{c}{c+d}+\frac{d}{c+d}=2,$$

$$f(a,b,c,d)>\frac{a}{a+b+c+d}+\frac{b}{a+b+c+d}+\frac{c}{a+b+c+d}+\frac{d}{a+b+c+d}=1.$$

可知　　$1<S<2$。　　(1)

因而，所求的 S 的取值范围包含在开区间 $(1,2)$ 内。

下面来证明：对于每一个 $y\in(1,2)$，总存在正实数 a,b,c,d 使 $f(a,b,c,d)=y$。

因为 y 是满足条件 $1<y<2$ 的任意固定的数，所以存在一个小正数 $\delta>0$，使得

$$1+\delta<y<2-\delta. \tag{2}$$

取 $\delta=\frac{1}{2}\min\{2-y, y-1\}$，则显然有 $0<\delta\leqslant\frac{1}{4}$（图16-4）。



图 16-4

再考虑变数 t 的函数

$$F(t)=f\left[1,\frac{\delta}{4}+t\left(1-\frac{\delta}{4}\right),\ 1+t\left(\frac{\delta}{4}-1\right),\ \frac{\delta}{4}\right],\qquad(3)$$

其中 $0\leqslant t\leqslant 1$。由于

$$1>0,\frac{\delta}{4}+t\left(1-\frac{\delta}{4}\right)\geqslant\frac{\delta}{4}>0,$$

$$1+t\left(\frac{\delta}{4}-1\right)=1-t+\frac{\delta}{4}t>0,\quad \frac{\delta}{4}>0,$$

所以,只要 $0\leqslant t\leqslant 1$，总有正实数

$$a=1,b=\frac{\delta}{4}+t\left(1-\frac{\delta}{4}\right),$$

$$c=1+t\left(\frac{\delta}{4}-1\right),\quad d=\frac{\delta}{4}$$

使得 $F(t)=f(a,b,c,d)$。

由(2)又可知

$$F(0)=f\left(1,\frac{\delta}{4},1,\frac{\delta}{4}\right)$$

$$=\frac{1}{1+\frac{\delta}{4}+\frac{\delta}{4}}+\frac{\frac{\delta}{4}}{1+\frac{\delta}{4}+1}$$

$$+\frac{1}{\frac{\delta}{4}+1+\frac{\delta}{4}}+\frac{\frac{\delta}{4}}{1+1+\frac{\delta}{4}}$$

$$=\frac{2}{1+\frac{\delta}{2}}+\frac{\frac{\delta}{2}}{2+\frac{\delta}{4}}>\frac{2}{1+\frac{\delta}{2}}$$

$$=\frac{2\left(1-\frac{\delta}{2}\right)}{1-\frac{\delta^2}{4}}>2-\delta>y,$$

$$F(1)=f\left(1,1,\frac{\delta}{4},\frac{\delta}{4}\right)$$

$$=\frac{1}{1+1+\frac{\delta}{4}}+\frac{1}{1+1+\frac{\delta}{4}}$$

$$+\frac{\frac{\delta}{4}}{1+\frac{\delta}{4}+\frac{\delta}{4}}+\frac{\frac{\delta}{4}}{1+\frac{\delta}{4}+\frac{\delta}{4}}$$

$$=\frac{2}{2+\frac{\delta}{4}}+\frac{\frac{\delta}{2}}{1+\frac{\delta}{2}}<1+\frac{\delta}{2}<1+\delta<y,$$

从而　　$F(1)<y<F(0)$。

因为 $F(t)$ 是区间 $[0,1]$ 上的连续函数，所以至少有一个 $t_o\in[0,1]$ 使 $F(t_o)=y$。亦即

$$f\left[1,\frac{\delta}{4}+t_o\left(1-\frac{\delta}{4}\right),1+t_o\left(\frac{\delta}{4}-1\right),\frac{\delta}{4}\right]=y.$$

这就证明了，和 S 可以取区间 $(1,2)$ 内的一切值。

题 6　由于 $p(x)$ 不是常数，故 $\deg(p)\geqslant1$。从而

$$\deg(p^2)=2\deg(p). \tag{1}$$

根据代数学基本定理知

$$n(p)\leqslant\deg(p^2-1)=\deg(p^2). \tag{2}$$

由(1)，(2)可得

$$n(p)-\deg(p)\leqslant\deg(p^2)-\deg(p)=\deg(p).$$

也就是说，当 $\deg(p)\leqslant 2$ 时，有 $n(p)-\deg(p)\leqslant 2$。

下面来证明：对于任何 $\deg(p)>2$ 的多项式也有 $n(p)-\deg(p)\leqslant 2$。

用反证法．假设结论不成立，即假设 $n(p)-\deg(p)>2$，于是

$$n(p)\geqslant\deg(p)+3. \qquad (3)$$

又设 $M_1=\{x_1,x_2,\cdots,x_k\}$ 是满足条件 $p(x_i)=-1(i=1,2,\cdots,k)$ 的整数 x_i 的集合；$M_2=\{y_1,y_2,\cdots,y_l\}$ 是满足条件 $p(y_j)=1(j=1,2,\cdots,l)$ 的整数 y_j 的集合，其中 $k+l=n(p)$。显然，集合 M_1 和 M_2 不会含有公共元素。我们来证明，集合 M_1 和 M_2 都是非空集合。不然的话，如果 M_1，M_2 中有一个是空集，比方说，M_2 是空集，那么集合 M_1 含有 $n(p)$ 个元素，也就是说，多项式方程 $p(x)=-1$ 有 $n(p)$ 个根，由代数学基本定理可知，$n(p)\leqslant\deg(p)$，但是这与(3)矛盾。

再者，根据代数学基本定理还可以得出：

$$k\leqslant\deg(p),\ l\leqslant\deg(p) \qquad (4)$$

而由(3)、(4)又可得

$$k+l=n(p)\geqslant\deg(p)+3\geqslant k+3,$$

$$k+l=n(p)\geqslant\deg(p)+3\geqslant l+3.$$

从而可知 $k\geqslant 3$，$l\geqslant 3$。

因为集合 M_1 和 M_2 不含公共元素，所以整数 $x_1,x_2,\cdots,x_k,y_1,y_2,\cdots,y_l$ 中的最小者只能在 M_1 或 M_2 之一中出现，不妨设这个最小数就是 x_1。因为 $l\geqslant 3$，所以至少有一个 $j(1\leqslant j\leqslant l)$ 使得

$$y_j-x_1\geqslant 3. \qquad (5)$$

由于 $p(x)$ 是整系数多项式，故 $p(x)$ 可记为

$$p(x)=a_m x^m+a_{m-1}x^{m-1}+\cdots+a_1 x+a_0,$$

其中 $a_i(i=0,1,\cdots,m)$ 是整数，$\deg(p)=m$。设此多项式满足上面讨论中的要求，于是

$$p(x_1)=a_m x_1^m+a_{m-1}x_1^{m-1}+\cdots+a_1 x_1+a_0=-1,$$

$$p(y_j)=a_m y_j^m+a_{m-1}y_j^{m-1}+\cdots+a_1 y_j+a_0=1.$$

将两式相减，得

$$a_m(y_j^m-x_1^m)+a_{m-1}(y_j^{m-1}-x_1^{m-1})+\cdots$$

$$+a_1(y_j-x_1)=2.$$

在上式中，$a_i(i=1,2,\cdots,m)$ 都是整数，并且左端含有因子 y_j-x_1，所以 y_j-x_1 可整除 2，从而

$$y_j-x_1\leqslant 2. \qquad (6)$$

但这与(5)矛盾。这就证明了我们的命题。

第 十 七 届

第十七届国际数学奥林匹克于一九七五年在保加利亚举行。

竞 赛 题

题1 设 $x_i,y_i(i=1,2,\cdots,n)$ 都是实数，并且

$$x_1\geqslant x_2\geqslant\cdots\geqslant x_n,\ y_1\geqslant y_2\geqslant\cdots\geqslant y_n;$$

又 $z_1,z_2,\cdots,z_n$ 是 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 的一个排列。试证：

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2\leqslant\sum_{i=1}^{n}(x_i-z_i)^2.$$

（捷克斯洛伐克）

题2 设 $a_1,a_2,a_3,\cdots$ 是正整数无穷数列，并且对所有 $k\geqslant1$ 有 $a_k<a_{k+1}$。试证：此数列中有无限多项 a_m 可以表示成

$$a_m=xa_p+ya_q$$

的形式，其中 x，y 是适当的正整数，并且 $p\neq q$。

（英国）

题3 在任意 ΔABC 的外部作 ΔBPC、ΔCQA 和 ΔARB，使

$$\angle PBC=\angle CAQ=45°,$$

$$\angle BCP=\angle QCA=30°,$$

$$\angle ABR=\angle BAR=15°.$$

试证：（Ⅰ）$\angle QRP = 90^\circ$，

（Ⅱ）$QR = RP$。

（荷兰）

题4　设十进数 4444^{4444} 的各位数码之和为 A，而数 A 的各位数码之和为 B，求 B 的各位数码之和（所有的数都是十进数）。

（苏联）

题5　判断并证明：是否能够在半径为1的圆周上选取1975个点，使得其中任意两点间的直线距离都是有理数。

（苏联）

题6　求出满足下列条件的一切二元多项式 P：

① P 是 n 次齐次多项式，即对一切实数 t, x, y 有

$$P(tx,\ ty) = t^n P(x,y);$$

② 对一切实数 a, b, c 有

$$P(a+b,c) + P(b+c,a) + P(c+a,b) = 0;$$

③ $P(1,0) = 1$。

（英国）

题　　解

题1　因为

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n}x_i^2 + \sum_{i=1}^{n}y_i^2 - 2\sum_{i=1}^{n}x_i y_i,$$

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2 = \sum_{i=1}^{n}x_i^2 + \sum_{i=1}^{n}z_i^2 - 2\sum_{i=1}^{n}x_i z_i,$$

并且 $\sum_{i=1}^{n} y_i^2=\sum_{i=1}^{n} z_i^2$。

所以要证明的不等式

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2\leqslant\sum_{i=1}^{n}(x_i-z_i)^2 \tag{1}$$

等价于不等式

$$\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\geqslant\sum_{i=1}^{n}x_iz_i. \tag{2}$$

在(2)式中，左端的值是唯一确定的，右端的值与 $z_1,z_2,\cdots,z_n$ 有关。由于 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 的不同的排列只有有限个，因而(2)式右端只有有限个不同的值，这些值中必有最大值。下面证明，当 $y_i=z_i(i=1,2,\cdots,n)$ 时，(2)式右端的值最大。

设排列 $z_1,z_2,\cdots,z_n$ 与排列 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 不同，则在和

$$\sum_{i=1}^{n}x_iy_i=x_1z_1+\cdots+x_lz_l+\cdots+x_kz_k+\cdots+x_nz_n \tag{3}$$

中必存在两个足码 l, $k(1\leqslant l<k\leqslant n)$，使得 $x_l\geqslant x_k$，而 $z_l\leqslant z_k$。从而

$$(x_l-x_k)(z_l-z_k)\leqslant 0.$$

也就是说，

$$x_lz_l+x_kz_k\leqslant x_lz_k+x_kz_l. \tag{4}$$

因此，如果将(2)中的 z_l 与 z_k 互相对换，那么所得到的和式的值不小于原来和式的值。

由此可见，如果在(3)中对于所有的足码 l, k $(1\leqslant l<k\leqslant n)$ 都有 $z_l\geqslant z_k$，那么(3)取最大值。这时排列 $z_1,z_2,\cdots,z_n$

与排列 $y_1, y_2 \cdots, y_n$ 相同（可能某些相等的 y_i 互换了位置）。这就证明了不等式(2)，从而也证明了不等式(1)。

题 2　由题意知 $a_2 > 1$，因此可以按照关于模 a_2 同余把集合 $\{a_1, a_2, \cdots\}$ 分成同余类。因为关于模 a_2 的同余类只有有限个（a_2个），所以必存在一个同余类，其中包含所给数列的无限多项。我们来讨论这种同余类。设 a_p 是该同余类中满足条件 $a_p > a_2$ 的最小数。由于所给的数列是严格递增的，故仍有无限多项 a_m，使 $a_m > a_p$。因为 $a_m \equiv a_p \pmod{a_2}$，所以必有适当的正整数 y，使

$$a_m = a_p + y \cdot a_2.$$

今取 $x = 1, a_q = a_2$，便可将 a_m 表示成

$$a_m = xa_p + ya_q$$

的形式，并且由 $a_p > a_2$ 可知 $p \neq q$。于是证毕。

题 3　设自 P 引 CB 的垂线的垂足为 P_1，自 Q 引 AC 的垂线的垂足为 Q_1（图 17-1）。将 $A, B, C, P, Q, R, P_1, Q_1$ 看成复平面上的点，并将它们对应的复数记为 $a, b, c, p, q, r, p_1, q_1$。不失一般性，设

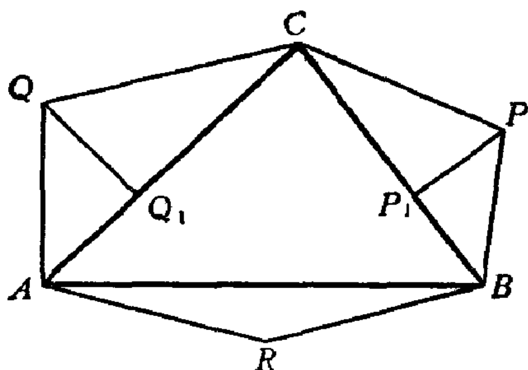


图 17-1

$$a = -1, b = 1.$$

我们来计算 p, q, r：

首先计算 r：

$$r = -i\text{tg}15° = -i\sqrt{\frac{1-\cos 30°}{1+\cos 30°}}$$

$$= -i\sqrt{7-4\sqrt{3}} = i(\sqrt{3}-2). \qquad (1)$$

再计算 p：

由于 C、P_1、B 共线，并且

$$\frac{CP_1}{P_1B}=\frac{\text{ctg}30°}{\text{ctg}45°}=\sqrt{3},$$

故 $$c-p_1=\sqrt{3}(p_1-b).$$

又因 $c-p_1=c-b-(p_1-b)$，故有

$$\sqrt{3}(p_1-b)=c-b-(p_1-b),$$

即 $$p_1-b=\frac{1}{\sqrt{3}+1}(c-b).$$

又因 p_1-b 到 $p-b$ 的夹角为 $-45°$，故

$$p-b=\sqrt{2}(p_1-b)[\cos(-45°)+i\sin(-45°)]$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}(c-b)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

其中 $b=1$，故有

$$p=\frac{\sqrt{3}-1}{2}(1-i)c-\frac{\sqrt{3}-1}{2}(1-i)+1. \quad (2)$$

最后，计算 q：

类似地，我们有

$$q_1-a=\frac{1}{\sqrt{3}+1}(c-a).$$

因为 q_1-a 到 $q-a$ 的夹角为 $45°$，故

$$q-a=\sqrt{2}(q_1-a)(\cos45°+i\sin45°)$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}(c-a)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

由于 $a=-1$，故有

$$q=\frac{\sqrt{3}-1}{2}(1+i)c+\frac{\sqrt{3}-1}{2}(1+i)-1. \quad (3)$$

这样一来，由(1)，(2)可得

$$p-r=\frac{\sqrt{3}-1}{2}(1-i)c+\frac{3-\sqrt{3}}{2}+\frac{3-\sqrt{3}}{2}i, \quad (4)$$

由(1)，(3)可得

$$q-r=\frac{\sqrt{3}-1}{2}(1+i)c+\frac{\sqrt{3}-3}{2}+\frac{3-\sqrt{3}}{2}i. \quad (5)$$

再由(4)，(5)即可得

$$(p-r)i=q-r.$$

这就是说，$|p-r|=|q-r|$，并且 $q-r$ 可由 $p-r$ 旋转 $90°$ 得到，这就证明了

$$QR=PR \text{ 并且 } \angle QRP=90°.$$

题 4 先进行一些估计。由

$$10000^{4444}=10^{4\times4444}$$

可知，数 10000^{4444} 有

$$4\times4444+1=17777$$

个数码。因为数码的最大值为 9，并且$4444^{4444}<10000^{4444}$，所以数 4444^{4444} 的各位数码之和 A 满足下面条件

$$A<17777\times9=159993. \quad (1)$$

故可设 $A=a_5\cdot10^5+a_4\cdot10^4+a_3\cdot10^3+a_2\cdot10^2+a_1\cdot10+a_0\cdot10^0, \quad (2)$

其中 $0\leqslant a_i\leqslant 9(i=0,1,2,3,4,5)$。由(1)可知，$a_5\leqslant 1$，从而数 A 的各位数码之和 B 满足下面条件

$$B\leqslant 1+5\times 9=46.$$

故又可设

$$B=b_1\cdot 10+b_0$$

其中 $0\leqslant b_1\leqslant 4$，$0\leqslant b_0\leqslant 9$。从而又可知数 B 的各位数码之和 C 满足条件

$$C\leqslant 4+9=13.$$

另一方面，由 $4444=9\times 493+7$ 可知

$$4444\equiv 7(\bmod 9),$$

据此并根据 $7^3\equiv 1(\bmod 9)$ 得

$$\begin{aligned}4444^{4444}&\equiv 7^{4444}(\bmod 9)\\&\equiv (7^3)^{1481}\times 7(\bmod 9)\\&\equiv 1^{1481}\times 7(\bmod 9)\\&\equiv 7(\bmod 9).\end{aligned}$$

又因为一个数与它的数码之和除以 9 所得的余数相同，所以

$$\begin{aligned}4444^{4444}&\equiv A(\bmod 9)\equiv B(\bmod 9)\\&\equiv C(\bmod 9).\end{aligned}$$

由此可见

$$C\equiv 7(\bmod 9).$$

但是 $C\leqslant 13$，故知 $C=7$，即数 B 的各位数码之和为 7．

题 5 设圆 O 的半径为 1．先来讨论一下如何计算圆 O 上两点的直线距离．为讨论方便起见，不妨设点 $P_i(i=1,2,\cdots,1975)$ 依次排列在圆 O 上，并且 $\angle P_iOP_{i+1}$ 为正向角，记为 α_i（图 17-2）。不难看出，如果点 $P_i,P_{i+1},\cdots,P_{i+k}$ 在同一半圆上，那么 P_i 与 P_{i+k} 间的直线距离 $d_{i,i+k}$ 的计算

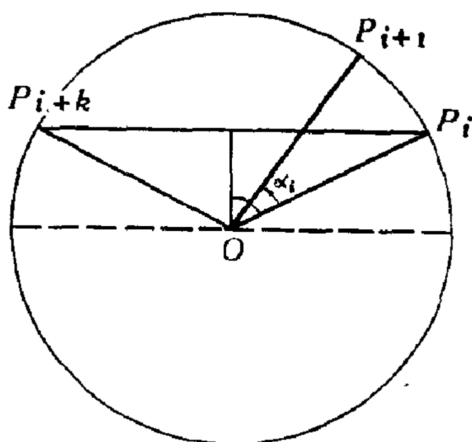


图 17-2

公式为：

$$d_{i,i+k}$$

$$=2\sin\left(\sum_{j=i}^{i+k-1}\frac{\alpha_j}{2}\right). \quad (1)$$

从而根据加法定理可知，如果对所有的 $j(j=i,\cdots,i+k-1)\sin\frac{\alpha_j}{2}$和$\cos\frac{\alpha_j}{2}$都是有理数,那么根据(1)求得的$d_{i,i+k}$也是有理数。这样问题就转化成求使得$\sin\frac{\alpha_j}{2}$和$\cos\frac{\alpha_j}{2}$都是有理数的角$\alpha_j$ ($j=1, 2, \cdots 1974$)。

为此，我们考虑下面的等式

$$\left(\frac{r^2-1}{r^2+1}\right)^2+\left(\frac{2r}{r^2+1}\right)^2=1, \quad (2)$$

其中 r 取有理数。因为

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{2r}{r^2+1}=0, \quad (3)$$

所以，对于任意 $\delta>0$,存在一个有理数 r，使

$$0<\frac{2r}{r^2+1}<\delta. \quad (4)$$

又因为正弦函数 $y=\sin x$ 是连续函数，并且由(2)可知$\frac{2r}{r^2+1}\leqslant1$,所以对每个有理数 r 必存在一个角 x，使得

$$\sin x=\frac{2r}{r^2+1},$$

同时由于正弦函数 $y=\sin x$ 在区间$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上是单调递增的，因而可知，当$\frac{2r}{r^2+1}$是任意充分小的非负有理数时，角 x 也是充分小的非负数。

今取

$$\delta=\sin\frac{\pi}{4000},$$

根据上面的讨论可知存在一个正有理数 r 和一个正数 α，满足条件

$$0<\alpha<\frac{\pi}{4000},\quad 0<\frac{2r}{r^2+1}<\delta,$$

并且 $$\sin\alpha=\frac{2r}{r^2+1},\quad \cos\alpha=\frac{r^2-1}{r^2+1},$$

都是有理数。这样，若取

$$\frac{\alpha_j}{2}=\alpha,\quad (j=1,\ 2,\ \cdots,\ 1974),$$

则由 $$\sum_{j=1}^{1974}\frac{\alpha_j}{2}=1974\alpha<1974\cdot\frac{\pi}{4000}<\frac{\pi}{2},$$

可知点 $P_1, P_2, \cdots, P_{1975}$ 位于同一个半圆上，从而由上面的讨论得到，这 1975 个点中任意两点间的直线距离都是有理数.

题 6　在②中，令 $a=b=c=y$，则有

$$P(2y,\ y)=0,$$

也就是说，当 $x=2y$ 时，多项式的值等于 0，因而多项式含有因式 $x-2y$，即

$$P(x,y)=(x-2y)Q_{n-1}(x,y), \qquad (1)$$

其中 $Q_{n-1}(x,y)$ 应为 $n-1$ 次齐次多项式.

再在 ② 中令 $a=b=x$, $c=2y$, 则有

$$P(2x,2y)=-2P(x+2y,x),$$

又由①可知 $P(2x,2y)=2^n P(x,y)$, 故

$$2^{n-1}P(x,y)=-P(x+2y,x). \qquad (2)$$

将(1)式的结论分别应用于(2)式的两端, 得

$$2^{n-1}(x-2y)Q_{n-1}(x,y)=-(2y-x)Q_{n-1}(x+2y,x),$$

从而可得

$$2^{n-1}Q_{n-1}(x,y)=Q_{n-1}(x+2y,x), \qquad (3)$$

将③应用于式(1), 得

$$Q_{n-1}(1,\ 0)=1. \qquad (4)$$

在(3)中令 $x=1$ 和 $y=0$,并利用(4),得

$$2^{n-1}=Q_{n-1}(1,1). \qquad (5)$$

再在(3)中令 $x=1$ 和 $y=1$,并根据(5),得

$$4^{n-1}=Q_{n-1}(3,\ 1). \qquad (6)$$

用类似的讨论方法依次可得

$$8^{n-1}=Q_{n-1}(5,3),$$

$$16^{n-1}=Q_{n-1}(11,\ 5),$$

$$32^{n-1}=Q_{n-1}(21,11),$$

…………

由此可见,存在无限多个数对(x,y),使

$$(2x+2y)^{n-1}=Q_{n-1}(x+2y,x),$$

也就是

$$2^{n-1}(x+y)^{n-1}=Q_{n-1}(x+2y,x).$$

由(3)可知 $Q_{n-1}(x+2y,x)=2^{n-1}Q_{n-1}(x,\ y)$, 故存在

无限多个数对(x,y)，使

$$Q_{n-1}(x,y)=(x+y)^{n-1}. \quad (7)$$

因为 $Q_{n-1}(x,y)$是一个多项式，所以(7)是一个恒等式. 从而由(1)可知，

$$P(x,y)=(x-2y)(x+y)^{n-1}, \quad (8)$$

不难验证，多项式(8)满足条件①、②、③.

于是，题中所要求的二元多项式只有多项式(8).

第 十 八 届

第十八届国际数学奥林匹克于一九七六年七月在奥地利举行。考试结果,荣获一等奖的有法国的比耶鲁(40 分),苏联的霍瓦诺娃(39 分),美国的克莱曼(38 分)等九人。

竞 赛 题

题 1 在一个面积为 $32cm^2$ 的平面凸四边形中,两条对边和一条对角线的长度之和为 16cm,试确定另一条对角线的所有可能长度。

(捷克斯洛伐克)

题 2 设 $P_1(x)=x^2-2$,

$$P_i(x)=P_1[P_{i-1}(x)], i=2,3,4,\cdots$$

试证:对任何自然数 n,方程

$$P_n(x)=x$$

的解是互不相同的实数。

(芬兰)

题 3 一个长方形盒子能完全被单位立方体填满,若在此盒子内尽可能放入体积是 2 个单位的立方体,且使小立方体的边平行于盒子的边,则恰好能填充到盒子体积的40%,试求出一切具有此种性质的盒子的大小($\sqrt[3]{2}=1.2599\cdots$)。

(荷兰)

题 4 若干个正整数的和为 1976，求这些正整数的积的最大值。（美国）

题 5 已知含 p 个方程 $q=2p$ 个未知数的方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1q}x_q=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2q}x_q=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{p1}x_1+a_{p2}x_2+\cdots+a_{pq}x_q=0, \end{cases} \quad (1)$$

其中 $a_{ij}\in\{-1,0,1\}$，$i=1,2,\cdots,p$；$j=1,2,\cdots,q$。试证：方程组(1)有一个具有下述性质的解$(x_1,x_2,\cdots,x_q)$：

① $x_j(j=1,2,\cdots,q)$都是整数；

② 至少有一个 $x_j(1\leqslant j\leqslant q)$不等于零；

③ $|x_j|\leqslant q(j=1,2,\cdots,q)$。

（荷兰）

题 6 设数列 $u_0,u_1,u_2,\cdots$的定义如下：

$$u_0=2,\quad u_1=\frac{5}{2},$$

$$u_{n+1}=u_n(u_{n-1}^2-2)-u_1, n=1,2,\cdots。$$

试证：

$$[u_n]=2^{\frac{2^n-(-1)^n}{3}},\quad n=1,2,\cdots$$

这里$[x]$表示不大于 x 的最大整数。

（英国）

题　解

题 1 设凸四边形 $ABCD$ 的面积为

$$S_{ABCD}=32\text{cm}^2, \tag{1}$$

并且,不失一般性,设

$$AC+AB+CD=16\text{cm} \tag{2}$$

(图 18-1)。于是

$$2S=AB\cdot AC\sin\angle CAB+CD\cdot AC\sin\angle ACD. \tag{3}$$

由 $\sin x\leqslant 1$ 可知

$$\begin{aligned}2S&\leqslant AB\cdot AC+CD\cdot AC\\&=AC(AB+CD).\end{aligned} \tag{4}$$

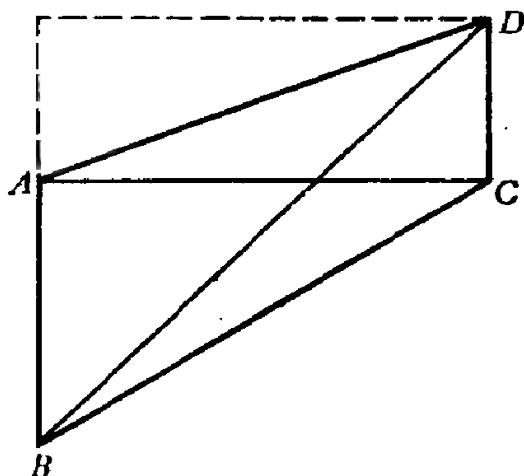


图 18-1

因为两个正数的几何平均值不大于它的算术平均值，所以

$$AC(AB+CD)\leqslant\left(\frac{AC+AB+CD}{2}\right)^2. \tag{5}$$

由(4)、(5)可得

$$2S\leqslant\left(\frac{AC+AB+CD}{2}\right)^2. \tag{6}$$

将(1)、(2)代入(6)，得

$$64=2S\leqslant\left(\frac{16}{2}\right)^2=64.$$

由此可见，在(4),(5)中都应取等号.由于(5)取等号,故

$$AC = AB + CD.$$

再根据(2)可得

$$AC = 8\text{cm}.$$

由于凸四边形 $ABCD$ 的内角小于 180°，故

$$0 < \sin\angle CAB \leqslant 1,\ 0 < \sin\angle ACD \leqslant 1,$$

再根据(3)可得

$$\sin\angle CAB = 1,\ \sin\angle ACD = 1,$$

即 $$\angle CAB = \angle ACD = 90^\circ,$$

因而 $AB /\!/ CD$. 由勾股定理可得

$$BD^2 = (AB + CD)^2 + AC^2,$$

所以 $$BD = 8\sqrt{2}\ \text{cm}.$$

这就是另一条对角线唯一可能的长度。

题 2 用数学归纳法不难证明：当 $|x| > 2$ 时，必有 $p_n(x) > x$. 因此我们在定义域 $[-2, 2]$ 上讨论 $p_n(x)$，并作代换

$$x = 2\cos t,\ t \in [0, \pi].$$

首先用数学归纳法证明，对于任何自然数 n 有

$$P_n(2\cos t) = 2\cos 2^n t.$$

事实上，当 $n = 1$ 时，由

$$P_1(2\cos t) = 2(2\cos^2 t - 1) = 2\cos 2t$$

可知命题为真。

设命题对 $n-1$ 为真，即

$$P_{n-1}(2\cos t) = 2\cos 2^{n-1} t,$$

由 $P_n(x)$ 的定义可知，

$$\begin{aligned} P_n(2\cos t) &= P_1[P_{n-1}(2\cos t)] \\ &= P_1(2\cos 2^{n-1} t) \\ &= 2(2\cos^2 2^{n-1} t - 1) = 2\cos 2^n t. \end{aligned}$$

故命题对 n 为真，

其次，我们来解方程

$$P_n(2\cos t)=2\cos t, \tag{1}$$

即解方程

$$2\cos 2^n t=2\cos t. \tag{1'}$$

由方程(1′)可得

$$2^n t=\pm t+2m\pi,\ m=0,\pm 1,\pm 2,\cdots$$

即
$$t=\frac{2m\pi}{2^n\mp 1},\ m=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\cdots \tag{2}$$

从(2)中取出下列 2^n 个值：

$$t_k=\frac{2k\pi}{2^n-1},\ k=0,1,\cdots,2^{n-1}-1,$$

$$s_l=\frac{2l\pi}{2^n+1},\ l=1,\ 2,\ \cdots,\ 2^{n-1},$$

显然，这两组值满足下述关系

$$0\leqslant t_0<t_1<\cdots<t_{2^{n-1}-1}<\pi,$$

$$0<s_1<s_2<\cdots<s_{2^{n-1}}<\pi.$$

由于余弦函数在区间[0，π]内是单调递降的，故知

$2\cos t_k$(对应地，$2\cos s_l$)，

$k=0,1,\cdots,2^{n-1}-1$(对应地，$l=1,2,\cdots,2^{n-1}$)，

是方程(1′)的不同的解。

再来证明，$t_{k_0}\neq s_{l_0}(0\leqslant k_0\leqslant 2^{n-1}-1,1\leqslant l_0\leqslant 2^{n-1})$.

如其不然，由

$$\frac{2k_0\pi}{2^n-1}=\frac{2l_0\pi}{2^n+1}$$

可得 $$l_0=k_0\frac{2^n+1}{2^n-1}=k_0+k_0\frac{2}{2^n-1},$$

因为$(2,2^n-1)=1$，即 2 与 2^n-1 互质，并且 l_0 是自然数，所以应有 2^n-1 整除 k_0，但是 $0\leqslant k_0\leqslant 2^{n-1}-1$，故必有 $k_0=0$，从而 $l_0=0$，这与 $1\leqslant l_0$ 矛盾。

由此可见，$2\cos t_{k_0}\neq 2\cos s_{l_0}$ $(0\leqslant k_0\leqslant 2^{n-1}-1,\ 1\leqslant l_0\leqslant 2^{n-1})$，也就是说，

$$x_k=2\cos t_k \quad (k=0,1,\cdots,2^{n-1}-1)$$

和 $$x_l=2\cos s_l \quad (l=1,2,\cdots,2^{n-1})$$

是方程 $P_n(x)=x$ 的 2^n 个互不相同的实数解。并且由 $P_n(x)$ 的定义可知，这个方程是一个 2^n 次代数方程，由代数学基本定理可知，方程再也没有其他的解。

题 3　设盒子的边长分别为 a_1,a_2,a_3。由于盒子能被单位立方体填满，故知 a_1,a_2,a_3 都是正整数。又体积是 2 个单位的立方体的边长应为$\sqrt[3]{2}$个单位长度，并且对每个 $a_i(i=1,2,3)$都可找到一个正整数 b_i，使

$$b_i\sqrt[3]{2}<a_i<(b_i+1)\sqrt[3]{2},(i=1,2,3). \qquad (1)$$

这里，由于 a_i,b_i 都是整数，故不会出现等号。

由(1)可知

$$b_i=\left[\frac{a_i}{\sqrt[3]{2}}\right], \qquad (i=1,\ 2,\ 3) \qquad (2)$$

由于体积是 2 个单位的立方体恰好填充到盒子体积的 40%，故知

$$\frac{40}{100}a_1a_2a_3=b_1\sqrt[3]{2}\cdot b_2\sqrt[3]{2}\cdot b_3\sqrt[3]{2}=2b_1b_2b_3,$$

即 $$a_1a_2a_3=5b_1b_2b_3. \qquad (3)$$

由此可见，a_1, a_2, a_3 中必有一数能被 5 整除，并且

$$\frac{b_1}{a_1}\cdot\frac{b_2}{a_2}\cdot\frac{b_3}{a_3}=\frac{1}{5}. \qquad (4)$$

将(1)的右端三个不等式相乘，并利用(3)得，

$$5b_1b_2b_3<2(b_1+1)(b_2+1)(b_3+1). \qquad (5)$$

为了区别各种情况，再推导出几个式子．由于

$$\frac{5}{4}=1.25<\sqrt[3]{2}<1.26=\frac{63}{50},$$

故有

$$b_i=\left[\frac{a_i}{\sqrt[3]{2}}\right]\leqslant\left[\frac{a_i}{1.25}\right]\leqslant\frac{4}{5}a_i.$$

并且在上式中至少含有一个严格的不等号．因为，若 $\left[\frac{a_i}{1.25}\right]=\frac{4}{5}a_i$，则由 $\sqrt[3]{2}>1.25$ 可知 $\frac{a_i}{\sqrt[3]{2}}<\frac{a_i}{1.25}$，从而 $\left[\frac{a_i}{\sqrt[3]{2}}\right]<\frac{a_i}{1.25}=\frac{4}{5}a_i$．这样就得到一个在下面讨论中非常有用的不等式

$$\frac{b_i}{a_i}<\frac{4}{5},\ (i=1,2,3). \qquad (6)$$

类似地，由

$$b_i=\left[\frac{a_i}{\sqrt[3]{2}}\right]\geqslant\left[\frac{a_i}{1.26}\right]\geqslant\frac{50}{63}a_i-1$$

可得另一个非常有用的不等式：

$$\frac{b_i}{a_i}\geqslant\frac{50}{63}-\frac{1}{a_i},\ (i=1,2,3). \qquad (7)$$

特别地，我们有

$$当\ a_i \geqslant 4\ 时，\frac{b_i}{a_i} \geqslant \frac{50}{63} - \frac{1}{4} = \frac{137}{252} = A_4,$$

$$当\ a_i \geqslant 6\ 时，\frac{b_i}{a_i} \geqslant \frac{50}{63} - \frac{1}{6} = \frac{79}{126} = A_6, \qquad (7')$$

$$当\ a_i \geqslant 9\ 时，\frac{b_i}{a_i} \geqslant \frac{50}{63} - \frac{1}{9} = \frac{43}{63} = A_9.$$

(6)、(7)、(7′)在下面的讨论中将用来检验各种情况下是否能求出满足题意的解。为讨论方便起见，先根据(2)将 a_i，b_i，$\frac{a_i}{b_i}$ $(1 \leqslant i \leqslant 3)$的可取值列成一表(表中取 $\sqrt[3]{2} = 1.25$)：

表 A

a_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	…
b_i	1	2	3	3	4	5	6	7	7	8	9	…
$\frac{a_i}{b_i}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{6}{4}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{8}{6}$	$\frac{9}{7}$	$\frac{10}{7}$	$\frac{11}{8}$	$\frac{12}{9}$	…

并且，不失一般性，假设

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3\ (即\ b_1 \leqslant b_2 \leqslant b_3). \qquad (8)$$

我们将证明：当 $a_1 \geqslant 3$ 时，问题无解；当 $a_1 = 2$ 时，问题只有两解，$a_1 = 2$，$a_2 = 3$，$a_3 = 5$ 和 $a_1 = 2$，$a_2 = 5$，$a_3 = 6$。为此，分别各种情况讨论于下：

情形Ⅰ：$a_1 = 3$。

我们证明，当 $a_1 = 3$(即 $b_1 = 2$)时，问题无解。

由(5)可知，此时有

$$10b_2b_3<6(b_2+1)(b_3+1).$$

从而用 $6b_2b_3$ 除上式两端得

$$\frac{5}{3}<\left(1+\frac{1}{b_2}\right)\left(1+\frac{1}{b_3}\right).$$

由于 $a_2<a_3$ 即 $b_2<b_3$，故

$$\frac{5}{3}<\left(1+\frac{1}{b_2}\right)^2,$$

即
$$\sqrt{\frac{5}{3}}<1+\frac{1}{b_2}.$$

从而有

$$b_2<\frac{1}{\sqrt{\frac{5}{3}}-1}<4.$$

由表 A 可知，$a_2\leqslant5$，但是 $a_2\geqslant a_1=3$，故

$$3\leqslant a_2\leqslant5.$$

故知 a_2 仅能取 3,4,5.

① $a_2=3$.

由表 A 可知 $\frac{b_1}{a_1}=\frac{b_2}{a_2}=\frac{2}{3}$，根据(4)可算出

$$\frac{b_3}{a_3}=\frac{9}{20},$$

与(7′)比较，由于 $\frac{9}{20}<A_4$，故 $a_3<4$；又因为 a_1, a_2 都不能被 5 整除，所以 a_3 应被 5 整除，从而又有 $a_3\geqslant5$，这就得出矛盾，由此可知此时问题无解.

② $a_2=4$.

类似地，一方面应有 $a_3 \geqslant 5$，另一方面，由 $\frac{b_3}{a_3}=\frac{2}{5}<A_4$ 可知 $a_3<4$，故知此情形下问题也无解。

③ $a_2=5$。

类似地，一方面应有 $a_3 \geqslant a_2=5$，另一方面，由 $\frac{b_3}{a_3}=\frac{1}{2}<A_4$ 可知 $a_3<4$，故知此情形下问题也是无解。

情形Ⅱ：$a_1>3$。

我们证明，当 $a_1>3$（即 $b_1 \geqslant 3$）时，问题无解。

由(5)可知，此时有

$$\frac{5}{2} \frac{b_1}{b_1+1}<\left(1+\frac{1}{b_2}\right)\left(1+\frac{1}{b_3}\right),$$

因为当 $b_1 \geqslant 3$ 时，必有 $\frac{b_1}{b_1+1}>\frac{3}{4}$，故有

$$\frac{5}{2} \cdot \frac{3}{4}=\frac{15}{8}<\left(1+\frac{1}{b_2}\right)\left(1+\frac{1}{b_3}\right)<\left(1+\frac{1}{b_2}\right)^2,$$

从而可知

$$b_2<\frac{1}{\sqrt{\frac{15}{8}}-1}=\frac{\sqrt{\frac{15}{8}}+1}{\frac{7}{8}}=\frac{1}{7}(\sqrt{120}+8)$$

$$<\frac{1}{7}(\sqrt{121}+8)<\frac{1}{7} \times 19<3,$$

这和 $b_2 \geqslant b_1 \geqslant 3$ 矛盾。所以在此情形下问题无解。

情形Ⅲ：$a_1=2$。

首先证明，当 $a_1=2$（即 $b_1=1$）时，必有 $a_2 \leqslant 11$。

由(5)可知，此时有

$$5b_2b_3<4(b_2+1)(b_3+1).$$

又由 $b_2\leqslant b_3$ 可知

$$\frac{5}{4}<\left(1+\frac{1}{b_2}\right)\left(1+\frac{1}{b_3}\right)\leqslant\left(1+\frac{1}{b_2}\right)^2.$$

从而可知

$$b_2<\frac{1}{\sqrt{\frac{5}{4}}-1}=\frac{2}{\sqrt{5}-2}<\frac{2}{0.23}<9.$$

因此由表 A 可知 $a_2\leqslant 11$。

其次证明，当 $a_1=2$ 并且 $6\leqslant a_2\leqslant 11$ 时，问题无解。

由于 $a_1=2$，$b_1=1$，故可根据(4)和表 A 算出 $a_2=6,\cdots,11$ 时对应的 $\frac{b_3}{a_3}$ 之值：

a_2	6	7	8	9	10	11
$\frac{b_3}{a_3}$	$\frac{2}{5}\cdot\frac{6}{4}$	$\frac{2}{5}\cdot\frac{7}{5}$	$\frac{2}{5}\cdot\frac{8}{6}$	$\frac{2}{5}\cdot\frac{9}{7}$	$\frac{2}{5}\cdot\frac{10}{7}$	$\frac{2}{5}\cdot\frac{11}{8}$

因为 $\quad\frac{6}{4}>\frac{7}{5}>\frac{8}{6}>\frac{9}{7},\ \frac{6}{4}>\frac{10}{7}>\frac{11}{8},$

并且 $\quad\frac{2}{5}\cdot\frac{6}{4}=\frac{3}{5}<A_6$。

故由(7′)可知当 $a_1=2$，$6\leqslant a_2\leqslant 11$ 时，应有 $a_3<6$，这是与 $a_3\geqslant a_2\geqslant 6$ 矛盾的，所以在此情形下问题无解。

最后，分别讨论 $a_2=2,3,4,5$ 的情形。仍根据(4)和表 A 分别算出 a_2 的对应 $\frac{b_3}{a_3}$ 值：

a_2	2	3	4	5
$\frac{b_3}{a_3}$	$\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{1}$	$\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{2}$	$\frac{2}{5}\cdot\frac{4}{3}$	$\frac{2}{5}\cdot\frac{5}{3}$

由此分别讨论于下：

① $a_2=2$：$\frac{b_3}{a_3}=\frac{4}{5}$，此与(6)矛盾，所以此时问题无解。

② $a_2=3$：$\frac{b_3}{a_3}=\frac{6}{10}<A_6$，由(7′)可知，$a_3<6$；又由 a_1，a_2 都不能被 5 整除知道，必有 5 整除 a_3，因而 $a_3\geqslant5$。从而得 $a_3=5$。也就是有

$$a_1=2,\ a_2=3,\ a_3=5.$$

不难验证，这是问题的一个解。

③ $a_2=4$：$\frac{b_3}{a_3}=\frac{8}{15}<A_4$，从而由(7′)可知 $a_3<4$，这与 $a_3\geqslant a_2=4$ 矛盾，所以此时问题无解。

④ $a_2=5$：$\frac{b_3}{a_3}=\frac{10}{15}<A_9$，由(7′)可知，$a_3<9$；又由 $15b_3=10a_3$ 可知 3 整除 a_3，因而 a_3 不会是 5，7，8。由 $a_3\geqslant a_2=5$ 可知，只能有 $a_3=6$。也就是有

不难验证，这是问题的一个解。

$$a_1=2,\ a_2=5,\ a_3=6.$$

综上所述，盒子的大小只有两种：

$$2\times3\times5\quad 或\quad 2\times5\times6.$$

题 4 因为 1976 表示成正整数之和的表示式只有有限个，所以对应的乘积也只有有限个，因而其中必有最大者。设正整数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 满足条件

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1976 \tag{1}$$

并且乘积

$$p = x_1 x_2 \cdots x_n \tag{2}$$

最大。这时，$x_i (i=1,2,\cdots,n)$ 必有下列性质：

① $x_i \leqslant 4 \quad (i=1,2,\cdots,n)$。

不然的话，例如，设 $x_1 > 4$，则可将 x_1 拆成 $x_1 - 2$ 与 2 之和，仍有

$$(x_1 - 2) + 2 + x_2 + \cdots + x_n = 1976;$$

但是由 $(x_1 - 2) \cdot 2 = 2x_1 - 4 = x_1 + (x_1 - 4) > x_1$ 可知

$$(x_1 - 2) \cdot 2 \cdot x_2 \cdots x_n > x_1 x_2 \cdots x_n = p.$$

此与 p 是最大积矛盾。

② $x_i \neq 1 \quad (i=1,2,\cdots,n)$。

否则，设 $x_1 = 1$，则有

$$(1 + x_2) + x_3 + \cdots + x_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1976,$$

但是 $\qquad (1 + x_2) x_3 \cdots x_n > x_1 x_2 \cdots x_n = p,$

此与 p 是最大积矛盾。

③ 若 $x_i (1 \leqslant i \leqslant n)$ 中有等于 4 时，则可用 $2+2$ 代替而不改变乘积(2)之值。

例如，设 $x_n = 4$，则令 $x_n' = 2, x_n'' = 2$，就有

$$x_1 + \cdots + x_{n-1} + x_n = x_1 + \cdots + x_{n-1} + x_n' + x_n'' = 1976,$$

但由 $4 = 2 + 2 = 2 \times 2$ 可知

$$p = x_1 \cdots x_{n-1} x_n = x_1 \cdots x_{n-1} x_n' x_n''.$$

由性质①—③即可推得，最大积 p 应具有形式

$$p = 2^r 3^s. \tag{3}$$

在(3)中，必有 $r < 3$。不然的话，若 $r \geqslant 3$，则由 $2+2+2=3+3$ 可知

$$\underbrace{2+2+\cdots+2}_{r\text{个}}+\underbrace{3+3+\cdots+3}_{s\text{个}}$$

$$=\underbrace{2+2+\cdots+2}_{r-3\text{个}}+\underbrace{3+3+\cdots+3}_{s+2\text{个}}=1976,$$

但是由 $2^3<3^2$ 可得

$$p=2^r3^s=2^3\cdot 2^{r-3}3^s<3^2\cdot 2^{r-3}3^s=2^{r-3}3^{s+2},$$

这与 p 为最大积矛盾。由此可见，r 只能取 0,1,2。

最后，由

$$1976=3\times 658+2$$

可知最大积为

$$p=2\cdot 3^{658}.$$

题 5 考虑 q 维向量 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_q)$，若 X 的分量 x_j 都是整数. 并且满足条件

$$|x_j|\leqslant p,(j=1,2,\cdots,q), \qquad (1)$$

则因每个 $x_j(1\leqslant j\leqslant q)$ 只可取

$$0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots,\ \pm p$$

中的值，共有 $2p+1$ 种取法，故满足条件(1)的 q 维向量 X 共有 $(2p+1)^q$ 个。

因为 $a_{ij}\in\{-1,0,1\}$，所以满足条件(1)的 q 维向量 X 还应满足下面的不等式

$$\left|\sum_{j=1}^{q}a_{ij}x_j\right|=|a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{iq}x_q|$$

$$\leqslant|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_q|\leqslant pq,$$

$$(i=1,2,\cdots,p)$$

也就是说，在上式中，左端的每个

$$\sum_{j=1}^{q} a_{ij}x_j = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{iq}x_q \quad (1 \leqslant i \leqslant p)$$

只能取　0，±1，±2，…，±pq中的值，因而至多有 $2pq+1$ 种取法。由此可见，当 q 维向量$(x_1, x_2, \cdots, x_q)$满足条件(1)时，下面的 p 维向量

$$\left(\sum_{j=1}^{q} a_{1j}x_j,\ \sum_{j=1}^{q} a_{2j}x_j,\ \cdots,\ \sum_{j=1}^{q} a_{pj}x_j\right) \qquad (2)$$

至多有$(2pq+1)^p$ 个。

因为 $(2p+1)^q = (2p+1)^{2p} = (4p^2+4p+1)^p$

$$>(4p^2+1)^p = (2pq+1)^p,$$

所以，一定存在两个不同的 q 维向量

$$X' = (x'_1, x'_2, \cdots, x'_q),\quad X'' = (x''_1, x''_2, \cdots, x''_q)$$

使得

$$\left(\sum_{j=1}^{q} a_{1j}x'_j,\ \sum_{j=1}^{q} a_{2j}x'_j,\ \cdots,\ \sum_{j=1}^{q} a_{pj}x'_j\right)$$

$$=\left(\sum_{j=1}^{q} a_{1j}x''_j,\ \sum_{j=1}^{q} a_{2j}x''_j,\ \cdots,\ \sum_{j=1}^{q} a_{pj}x''_j\right),$$

即

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{q} a_{1j}(x'_j - x''_j) = 0 \\ \sum_{j=1}^{q} a_{2j}(x'_j - x''_j) = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \sum_{j=1}^{q} a_{pj}(x'_j - x''_j) = 0. \end{cases}$$

于是

$$(x_1'-x_1'',x_2'-x_2'',\cdots,x_q'-x_q'')$$

就是满足题意的解．因为

① 由于 $x_j',x_j''(j=1,2,\cdots,q)$ 都是整数，故 $x_j'-x_j''$ 也都是整数。

② 由于 X' 与 X'' 不相同，故 $x_j'-x_j''(j=1,2,\cdots q)$ 中至少有一个不为零。

③ 由于 $|x_j'|\leqslant p$，$|x_j''|\leqslant p(j=1,2,\cdots,q)$，故

$$|x_j'-x_j''|\leqslant|x_j'|+|x_j''|\leqslant 2p=q.$$

题6 首先用数学归纳法证明：当 $n>0$ 时，

$$u_n==2^{\frac{2^n-(-1)^n}{3}}+2^{-\frac{2^n-(-1)^n}{3}}.$$

事实上，由

$$u_1=\frac{5}{2}=2^1+2^{-1}=2^{\frac{2^1-(-1)^1}{3}}+2^{-\frac{2^1-(-1)^1}{3}},$$

$$u_2=\frac{5}{2}=2^{\frac{2^2-(-1)^2}{3}}+2^{-\frac{2^2-(-1)^2}{3}},$$

可知命题对 $n=1,2$ 为真。

设命题对 $n=k-1$，k 为真，我们来证明命题对 $n=k+1$ 为真。设

$$f(n)=\frac{2^n-(-1)^n}{3}$$

由数列的递推关系得

$$u_{k+1}=(2^{f(k)}+2^{-f(k)})[(2^{f(k-1)}+2^{-f(k-1)})^2-2]-$$

$$-\frac{5}{2}=2^{f(k)+2f(k-1)}+2^{-[f(k)+2f(k-1)]}+$$

$$+2^{f(k)-2f(k-1)}+2^{-[f(k)-2f(k-1)]}-\frac{5}{2}.$$

因为

$$f(k)+2f(k-1)=\frac{2^k-(-1)^k}{3}+2\cdot\frac{2^{k-1}-(-1)^{k-1}}{3}$$

$$=\frac{2^{k+1}-(-1)^{k+1}}{3}=f(k+1),$$

$$f(k)-2f(k-1)=\frac{2^k-(-1)^k}{3}-2\cdot\frac{2^{k-1}-(-1)^{k-1}}{3}$$

$$=(-1)^{k+1},$$

所以

$$u_{k+1}=2^{f(k+1)}+2^{-f(k+1)}+2^{(-1)^{k+1}}+2^{-(-1)^{k+1}}-\frac{5}{2}.$$

因为

$$2^{(-1)^{k+1}}+2^{-(-1)^{k+1}}-\frac{5}{2}=2^{(-1)^{k+1}}+2^{(-1)^k}-\frac{5}{2}=0,$$

所以

$$u_{k+1}=2^{f(k+1)}+2^{-f(k+1)}$$

$$=2^{\frac{2^{k+1}-(-1)^{k+1}}{3}}+2^{-\frac{2^{k+1}-(-1)^{k+1}}{3}}.$$

这就证明了命题对 $n=k+1$ 为真。

其次证明：

$$f(n)=\frac{2^n-(-1)^n}{3}$$

是整数。

因为当 n 为偶数时，

$$2^n \equiv 1(\bmod 3)\text{且}(-1)^n \equiv 1(\bmod 3);$$

当 n 为奇数时，

$$2^n \equiv 2(\bmod 3)\text{且}(-1)^n \equiv 2(\bmod 3).$$

所以

$$2^n-(-1)^n \equiv 0(\bmod 3).$$

因此

$$f(n)=\frac{2^n-(-1)^n}{3}$$

是整数，从而 $2^{-f(n)}$ 是真分数．由此可知

$$[u_n]=2^{\frac{2^n-(-1)^n}{3}}.$$

第 十 九 届

第十九届国际数学奥林匹克于一九七七年七月四日至五日在南斯拉夫举行。

竞 赛 题

题 1 在正方形 $ABCD$ 的内部作等边三角形 ABK、BCL、CDM 和 DAN，证明四线段 KL、LM、MN、NK 的中点和八线段 AK、BK、BL、CL、CM、DM、DN、AN 的中点，是一个正十二边形的十二个项点。

（6 分）

题 2 一个有限项实数序列，它的任意连续七项之和是负数，任意连续十一项之和是正数．试问：这样的数列最多能有多少项?

（6 分）

题 3 设 n 是给定的整数，且 $n>2$。V_n 是整数 $1+kn$ 的集合，其中 $k=1,2,\cdots$。一个数$m\in V_n$，如果不存在数 p、$q\in V_n$，使 $pq=m$，则称数 m 为 V_n 中的不可分解数。证明：存在一个数 $r\in V_n$，它可以用不止一种方式表示为 V_n 中几个不可分解数的乘积(只有元素次序不同的表示式认为是相同的)。

（7 分）

题 4 设 a、b、A、B 为已知实数，

$$f(\theta)=1-a\cos\theta-b\sin\theta-A\cos2\theta-B\sin2\theta。$$

证明：如果对于一切实数 θ，$f(\theta)\geqslant0$，那么 $a^2+b^2\leqslant2$，$A^2+B^2\leqslant1$。（6分）

题5 设 a、b 是正整数，当 a^2+b^2 被 $a+b$ 除时，商为 q，余数为 r。求所有的数对 (a,b)，使 $q^2+r=1977$。

（7分）

题6 设 $f(n)$ 是定义在正整数集上的函数，所取得的函数值也在正整数集中。证明：如果对于每一正整数 n，$f(n+1)>f[f(n)]$，那么 $f(n)=n$ 对于每一 n 值都成立。

（8分）

题 解

题1 如图19-1所示，以已知正方形的中心 O 为原点，以正方形边长之半为长度单位建立直角坐标系。则正方形四个顶点的坐标分别为：

$$A(-1,-1),\ B(1,-1),\ C(1,1),\ D(-1,1).$$

因为所作的四个等边三角形分别对称于 x 轴或 y 轴，所以 K、L、M、N 四点在 x 轴或 y 轴上，从而不难求得它们的坐标分别为：

$$K(0,\ \sqrt{3}-1),\ L[-(\sqrt{3}-1),0],$$
$$M[0,\ -(\sqrt{3}-1)],\ N(\sqrt{3}-1,0).$$

设 CL、NK、CM 的中点分别为 P_1、P_2、P_3，利用中点坐标公式可得这三个中点的坐标：

$$P_1\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right),\ P_2\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2},\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right),$$

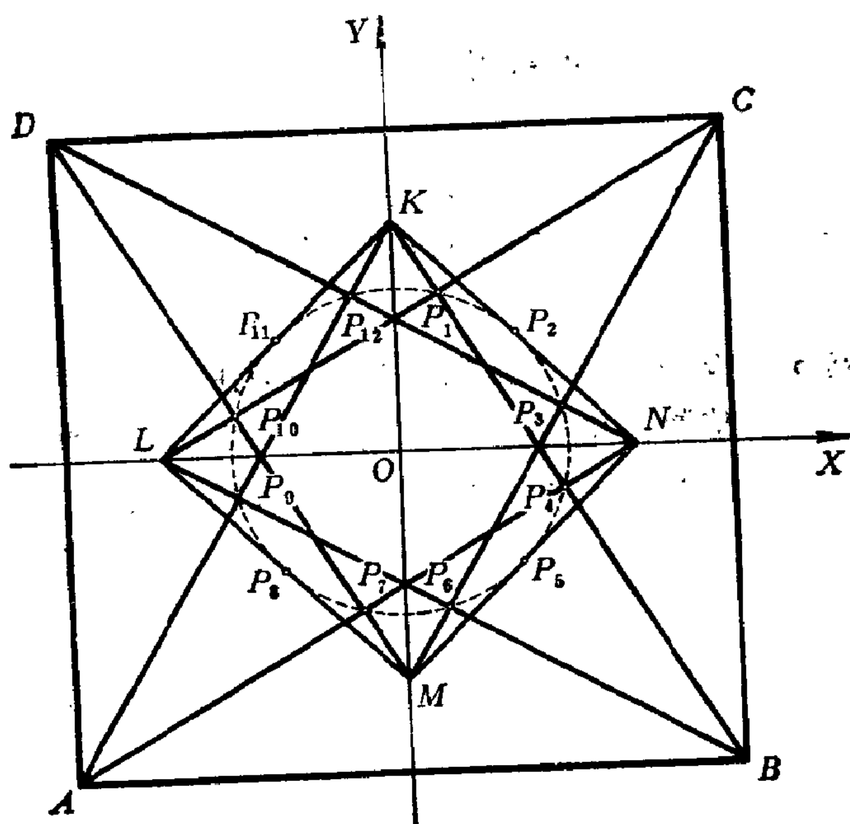


图 19-1

$$P_3\left(\frac{1}{2},\ 1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

利用两点间的距离公式可得

$$|P_1P_2| = \sqrt{\left(\sqrt{3}-\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-1\right)^2}$$

$$=\sqrt{7-4\sqrt{3}}=2-\sqrt{3},$$

$$|P_2P_3| = \sqrt{\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}-\sqrt{3}\right)^2}$$

$$=\sqrt{7-4\sqrt{3}}=2-\sqrt{3};$$

$$|OP_1|=\sqrt{\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{2-\sqrt{3}},$$

$$|OP_2|=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2}=\sqrt{2-\sqrt{3}},$$

$$|OP_3|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{2-\sqrt{3}}.$$

∴ $|OP_1|=|OP_2|=|OP_3|$

且 $|P_1P_2|=|P_2P_3|$。

又由对称性可知，所设这十二条线段的中点，即图中的点P_1、P_2、P_3、…、P_{11}、P_{12}，与O点的距离都相等，即它们都在以O为圆心、$\sqrt{2-\sqrt{3}}$为半径的圆上；并且每相邻两点之间的距离都相等（都等于$2-\sqrt{3}$）。因此，这12个点是一个正十二边形的顶点。

题2 首先我们来证明：这样的数列的项数不可能大于16。用反证法。假定存在一个这样的数列，其项数大于16，设这个数列为

$$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{17}, \cdots, a_n. \quad (n\geqslant 17)$$

由已知条件可得

$$(a_1+a_2+\cdots+a_{11})+(a_2+a_3+\cdots+a_{12})+\cdots$$
$$+(a_7+a_8+\cdots+a_{17})>0 \qquad (1)$$

$$(a_1+a_2+\cdots+a_7)+(a_2+a_3+\cdots+a_8)+\cdots$$
$$+(a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{17})<0 \qquad (2)$$

但是(1)、(2)两个不等式的左边都等于$a_1+2a_2+3a_3+4a_4+5a_5+6a_6+7a_7+7a_8+7a_9+7a_{10}+7a_{11}+6a_{12}+5a_{13}+4a_{14}+3a_{15}+2a_{16}+a_{17}$，它们的值是相等的，推出的不等式

(1)与(2)矛盾，故反设不真，因此，这样的数列的项数不可能大于 16。

而由16项组成的这样的数列是存在的。为了说明这一点，只要举出一个例子就行了。例如，数列

$$5, 5, -13, 5, 5, 5, -13, 5,$$
$$5, -13, 5, 5, 5, -13, 5, 5.$$

有16项，并且这个数列的任意连续七项中有五项等于 5，二项等于 -13，其和为 $-1<0$；而任意连续十一项中有八项等于5，三项等于 -13，其和为 $1>0$。

由此可得：这样的数列最多能有 16 项。

题 3 $V_n=\{1+n, 1+2n, \cdots, 1+kn, \cdots\}$ 其中 $n>2$，$k=1,2,\cdots$。

因为 $n>2$，所以显然有 $n-1\overline{\in}V_n$，$2n-1\overline{\in}V_n$；并且 $n-1$ 与 $2n-1$ 均不可能分解成几个 V_n 中的数的乘积。而

$$(n-1)(2n-1)=1+(2n-3)n\in V_n,$$
$$(n-1)^2=1+(n-2)n\in V_n,$$
$$(2n-1)^2=1+4(n-1)\cdot n\in V_n,$$

所以 $(n-1)(2n-1)$、$(n-1)^2$、$(2n-1)^2$ 都是 V_n 中的不可分解数。

设 $r=(n-1)^2(2n-1)^2$，则因

$$(n-1)^2(2n-1)^2=1+[n(2n-3)^2+2(2n-3)]\cdot n,$$

可知 $r\in V_n$。

并且 r 可有如下两种方式表示为 V_n 中不可分解数的乘积：

$$r=(n-1)^2\cdot(2n-1)^2;$$
$$r=[(n-1)(2n-1)]\cdot[(n-1)(2n-1)].$$

由此可见：存在着一个数 $r\in V_n$，它可以用不止一种方

式表示为 V_n 中几个不可分解数的乘积。

题4 选取两数 α、β，使

$$\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\qquad \sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}};$$

$$\cos\beta=\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}},\quad \sin\beta=\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

就有 $f(\theta)=1-\sqrt{a^2+b^2}\cos(\theta-\alpha)-\sqrt{A^2+B^2}\cos(2\theta-\beta)$。$f(\theta)\geqslant 0$ 可以表示为

$$1-\sqrt{a^2+b^2}\cos(\theta-\alpha)-\sqrt{A^2+B^2}\cos(2\theta-\beta)\geqslant 0, \tag{1}$$

即有

$$\sqrt{A^2+B^2}\cos(2\theta-\beta)\leqslant 1-\sqrt{a^2+b^2}\cos(\theta-\alpha). \tag{2}$$

由于 $f(\theta)\geqslant 0$ 对一切实数 θ 都成立，故(2)对于一切 θ 也都成立。设 $\theta=\frac{\beta}{2}$，则 $2\theta-\beta=0$，$\cos(2\theta-\beta)=1$，可得

$$\sqrt{A^2+B^2}\leqslant 1-\sqrt{a^2+b^2}\cos\left(\frac{\beta}{2}-\alpha\right). \tag{3}$$

设 $\theta=\pi+\frac{\beta}{2}$，则 $2\theta-\beta=2\pi$，$\theta-\alpha=\pi+\left(\frac{\beta}{2}-\alpha\right)$，从而

$\cos(2\theta-\beta)=1$，$\cos(\theta-\alpha)=-\cos\left(\frac{\beta}{2}-\alpha\right)$，就有

$$\sqrt{A^2+B^2}\leqslant 1+\sqrt{a^2+b^2}\cos\left(\frac{\beta}{2}-\alpha\right). \tag{4}$$

(3)+(4)，得

$$2\sqrt{A^2+B^2}\leqslant 2,$$

$$\therefore\quad \sqrt{A^2+B^2}\leqslant 1.$$

即

$$A^2+B^2\leqslant 1$$

又因不等式(1)可以写成

$$\sqrt{a^2+b^2}\cos(\theta-\alpha)$$
$$\leqslant 1-\sqrt{A^2+B^2}\cos(2\theta-\beta) \tag{5}$$

显然，不等式(5)对于一切实数 θ 也都成立。设 $\theta=\alpha+\frac{\pi}{4}$，则 $\theta-\alpha=\frac{\pi}{4}$，$2\theta-\beta=(2\alpha-\beta)+\frac{\pi}{2}$，从而 $\cos(\theta-\alpha)=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\cos(2\theta-\beta)=-\sin(2\alpha-\beta)$，有

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{a^2+b^2}\leqslant 1+\sqrt{A^2+B^2}\sin(2\alpha-\beta). \tag{6}$$

再设$\theta=\alpha-\frac{\pi}{4}$，则 $\theta-\alpha=-\frac{\pi}{4}$，$2\theta-\beta=(2\alpha-\beta)-\frac{\pi}{2}$，从而 $\cos(\theta-\alpha)=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\cos(2\theta-\beta)=\sin(2\alpha-\beta)$，有

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{a^2+b^2}\leqslant 1-\sqrt{A^2+B^2}\sin(2\alpha-\beta). \tag{7}$$

(6)+(7)，得

$$\sqrt{2}\cdot\sqrt{a^2+b^2}\leqslant 2,$$

$$\therefore\quad \sqrt{a^2+b^2}\leqslant\sqrt{2}.$$

即 $\qquad a^2+b^2\leqslant 2.$

题 5 $\quad a^2+b^2=(a+b)\cdot q+r\ (0\leqslant r<a+b) \qquad (1)$

$q^2+r=1977 \qquad (2)$

由(2)及 $r\geqslant 0$ 得 $q^2\leqslant 1977$，$q\leqslant 44$。

我们还可以证明 $q\leqslant 43$ 为不可能。事实上，

$$\because\quad 2(a^2+b^2)\geqslant(a+b)^2,$$

$$\therefore\quad \frac{a^2+b^2}{a+b}\geqslant\frac{a+b}{2}>\frac{r}{2}, \tag{3}$$

又由(1)，$q=\frac{a^2+b^2}{a+b}-\frac{r}{a+b}>\frac{a^2+b^2}{a+b}-1$，

$$\therefore\quad q>\frac{r}{2}-1. \tag{4}$$

如若 $q\leqslant 43$，则 $r=1977-q^2\geqslant 1977-43^2=128$，$\frac{r}{2}-1=63$。

由(4)可知，这是不可能的。

所以，$q=44$，$r=1977-44^2=41$，代入(1)，得

$$a^2+b^2=44(a+b)+41,$$

移项并整理，得

$$(a-22)^2+(b-22)^2=1009. \tag{5}$$

令 $$x=a-22,\ y=b-22, \tag{6}$$

得 $$x^2+y^2=1009. \tag{7}$$

我们来求方程(7)的整数解(x,y)。由于整数平方的个位数字只可能为 0，1，4，9，6，5，所以，若取 x^2 的个位数字为 0，1，4，9，6，5，则 $y^2=1009-x^2$ 的个位数字对应地分别为 9，8，5，0，3，4，它也是整数的平方，所以个位数字只可能为 9，5，0，4。因此，x^2 与 y^2 的个位数字只可能有下面四组对应的情况：

x^2 的个位数字：0，4，9，5；

y^2 的个位数字：9，5，0，4。

由此可见，在 x^2 与 y^2 两个数中，必定有一个的个位数字是 0 或 5，从而 x 与 y 两数中必定有一个的个位数字是 0 或 5。又因 x、y 满足方程(7)，故 $x^2\leqslant 1009$，$y^2\leqslant 1009$。所以 x 与 y 这两个数中必定有某一个，其绝对值只可能为 0，5，10，15，20，25，30。不妨设$|x|$取这些值，逐一代入(7)试之，由

$y^2=1009-x^2$ 是整数的平方可得，$|x|=15$，$|y|=28$。再由方程关于 x、y 对称，还可得 $|y|=15$，$|x|=28$。于是得

$$x=\pm15, y=\pm28; \text{或 } x=\pm28, y=\pm15.$$

又因 a、b 是正整数，由(6)知 $x>-22$，$y>-22$，故 $x=-28$ 或 $y=-28$ 不合要求，所以方程(7)的符合条件的整数解有下列四组：

$$\begin{cases}x=15\\y=28;\end{cases}\quad\begin{cases}x=-15\\y=28;\end{cases}\quad\begin{cases}x=28\\y=15;\end{cases}\quad\begin{cases}x=28\\y=-15.\end{cases}$$

代入(6)，得

$$\begin{cases}a=37\\b=50;\end{cases}\quad\begin{cases}a=7\\b=50;\end{cases}\quad\begin{cases}a=50\\b=37;\end{cases}\quad\begin{cases}a=50\\b=7.\end{cases}$$

即所求的数对 (a,b) 有下列四组：

$$(37,50),\ (7,50),\ (50,37),\ (50,7).$$

题6 我们先来证明：对于任意正整数 k，若 $n\geqslant k$，则 $f(n)\geqslant k$。

对 k 用数学归纳法。当 $k=1$ 时，由题给条件知 $f(n)$ 是正整数，即对任意正整数 n，总有 $f(n)\geqslant1$。因此，当 $k=1$ 时结论成立。

设结论对正整数 k 成立，要证明结论对 $k+1$ 也成立。当 $n\geqslant k+1$ 时，$n-1\geqslant k$。由归纳假设知，$f(n-1)\geqslant k$，从而有 $f[f(n-1)]\geqslant k$。又由已知 $f(n)>f[f(n-1)]$，故 $f(n)>k$，即有 $f(n)\geqslant k+1$。因此，结论对 $k+1$ 也成立。

在上述结论中，取 $k=n$，可得

$$f(n)\geqslant n \qquad (1)$$

对于任意正整数 n 成立。

我们再来证明 $f(n)$ 是严格递增函数。在(1)中取 $n=f(k)$，

则有 $f[f(k)]\geqslant f(k)$， 又因 $f(k+1)>f[f(k)]$，故 $f(k+1)>f(k)$，所以函数 $f(n)$ 是严格递增函数。

因为对于任意正整数 n，$f(n+1)>f[f(n)]$，而 $f(n)$ 是严格递增函数，所以 $n+1>f(n)$，即

$$f(n)\leqslant n \tag{2}$$

由(1)、(2)可得：对于任意正整数 n，有

$$f(n)=n。$$

第二十届

第二十届国际数学奥林匹克于一九七八年七月一日至十一日在罗马尼亚举行。

竞赛题

题1 数 1978^n 与 1978^m 的最后三位数相等，试求出正整数 n 和 m，使得 $m+n$ 取最小值。这里 $n>m\geqslant 1$。

（古巴，6分）

题2 在一个球体内有一定点 P，球面上有 A、B、C 三个动点，$\angle BPA=\angle CPA=\angle CPB=90°$，以 PA、PB、PC 为棱，构成平行六面体，点 Q 是平行六面体上与点 P 斜对的一个顶点，当 A、B、C 在球面上移动时，求 Q 点的轨迹。

（美国，7分）

题3 设 f，g：$Z^+\to Z^+$ 严格递增函数，且 $f(Z^+)\cup g(Z^+)=Z^+$，$f(Z^+)\cap g(Z^+)=\phi$，$g(\mu)=f[f(\mu)]+1$，求 $f(2\mu)$。这里 Z^+ 表示正整数集合，ϕ 表示空集。

（英国，8分）

题4 在 ΔABC 中，边 $AB=AC$，有一个圆内切于 ΔABC 的外接圆，并且与 AB、AC 分别相切于 P、Q，求证 P、Q 两点连线的中点是 ΔABC 的内切圆圆心。

（美国，5分）

题 5 已知$a_1, a_2, \cdots, a_k, \cdots$为两两各不相同的正整数，求证：对任何正整数$n$，下列不等式成立：

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k^2}\geqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}.$$

（法国， 6 分）

题 6 一个国际社团的成员来自六个国家，共有成员1978 人．用 1,2,3,…,1977,1978 编号．请证明：该社团至少有一个成员的顺序号数，与它的两个同胞的顺序号数之和相等，或是一个同胞的顺序号数的二倍．

（荷兰， 8 分）

题　　解

题 1 由题意，$1000|(1978^n-1978^m)$，即$2^3\cdot5^3|2^m\cdot\cdot989^m\cdot(1978^{n-m}-1)$。

$\because$ 989^m与$(1978^{n-m}-1)$都是奇数，$\therefore$ $2^3|2^m, m\geqslant3$。

又$\because$ 2^m与989^m都不含因数 5，$\therefore$ $5^3|(1978^{n-m}-1)$．而$1978^{n-m}=(2000-22)^{n-m}=1000k+(-22)^{n-m}$（这里的$k$及下面的$l,p,i,j,s,t,q$等均表示正整数），$\therefore$ $5^3|[(-22)^{n-m}-1]$．由于22^l的末位数字是 2、4、8、6、2、4、8、6，…循环，所以仅当$4|n-m$时，$(-22)^{n-m}-1$能被 5 整除，不妨设$n-m=4p$。

$$(-22)^{4p}=484^{2p}=(500-16)^{2p}=(1000i+256)^p$$
$$=(125j+6)^p=125s+6^p,\quad\therefore\ 5^3|6^p-1.$$

而 $6^p-1=(5+1)^p-1=5^3\cdot t+5^2\dfrac{p(p-1)}{2}+5p$

$$=5\left(5^2t+p\cdot\frac{5p-3}{2}\right)$$

$\therefore\ 5^2\left|p\cdot\frac{5p-3}{2}\right.$，$\because\ 5\nmid\frac{5p-3}{2}$，$\therefore\ 5^2|p$，即 $p=25q$。

于是，$n-m=4p=100q$。可见当 $m=3,n=103$（取 $q=1$）时，$n+m$ 取最小值 106。

题 2　以球心 O 为坐标原点，射线 OP 为 Ox 轴，球半径为长度单位，建立直角坐标系 $O\text{-}xyz$。

设 $|\overrightarrow{OP}|=p(O\leqslant p<1)$，则 P 点坐标为 $(p,0,0)$。

设 A、B、C 的坐标分别为 (x_1,y_1,z_1)，(x_2,y_2,z_2)，(x_3,y_3,z_3)，由于它们都在球面上，所以有

$$x_i^2+y_i^2+z_i^2=1\qquad(i=1,2,3)。\qquad(1)$$

于是向量 $\overrightarrow{OP}$，$\overrightarrow{PA}$，$\overrightarrow{PB}$，$\overrightarrow{PC}$ 的坐标分别为：

$$\overrightarrow{OP}=(p,0,0),\ \overrightarrow{PA}=(x_1-p,y_1,z_1),$$
$$\overrightarrow{PB}=(x_2-p,y_2,z_2),\ \overrightarrow{PC}=(x_3-p,y_3,z_3)。$$

由 $\angle BPA=\angle CPA=\angle CPB=90°$，可知 $\overrightarrow{PA}$，$\overrightarrow{PB}$，$\overrightarrow{PC}$ 两两正交，因此 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=0$，$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}=0$，$\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PA}=0$，即有

$$x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2-p(x_1+x_2)+p^2=0,$$
$$x_2x_3+y_2y_3+z_2z_3-p(x_2+x_3)+p^2=0,$$
$$x_3x_1+y_3y_1+z_3z_1-p(x_3+x_1)+p^2=0,$$

三式相加，有

$$\sum_{\substack{i,j=1\\i\neq j}}^{3}(x_ix_j+y_iy_j+z_iz_j)-2p\sum_{i=1}^{3}x_i+3p^2=0。\quad(2)$$

而　$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}$

$$= (x_1 + x_2 + x_3 - 2p, y_1 + y_2 + y_3, z_1 + z_2 + z_3),$$

$$|\overrightarrow{OQ}| = \{(x_1 + x_2 + x_3 - 2p)^2 + (y_1 + y_2 + y_3)^2 + (z_1 + z_2 + z_3)^2\}^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left\{\sum_{i=1}^{3}(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) + 2\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{3}(x_i x_j + y_i y_j + z_i z_j) - 4p\sum_{i=1}^{3} x_i + 4p^2.\right\}^{\frac{1}{2}}$$

由(1),(2)可得

$$|\overrightarrow{OQ}| = \sqrt{3 - 2p^2},$$

所以Q点在球面S：$x^2 + y^2 + z^2 = 3 - 2p^2$ 上。

反过来，对于球面S上任一点Q',必有单位球面上的三点A'、B'、C',使$\angle B'PA' = \angle C'PA' = \angle C'PB' = 90°$,且$Q'$为以$PA'$、$PB'$、$PC'$为棱的平行六面体上与$P$斜对的顶点。

事实上，球面S可以看成是由半圆周C：

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 3 - 2p^2 \\ y = 0 \\ z \geqslant 0 \end{cases}$$

绕Ox轴旋转一周而生成的，故只要对半圆周C上的一点Q'讨论就可以了。

我们可取A',B',C',使

$$\overrightarrow{PA'} = k(\cos\theta, 1, \sin\theta),\ \overrightarrow{PB'} = k(\cos\theta, -1, \sin\theta),$$
$$\overrightarrow{PC'} = l(-\sin\theta, 0, \cos\theta)\ (0 \leqslant \theta < 2\pi)$$

不难验证：$\angle B'PA' = \angle C'PA' = \angle C'PB' = 90°$，为

使 $|\overrightarrow{OA'}|=|\overrightarrow{OB'}|=|\overrightarrow{OC'}|=1$，取 $k=k(\theta)=[-p\cos\theta+\sqrt{2-p^2(1+\sin^2\theta)}]/2$，$l=l(\theta)=p\sin\theta+\sqrt{1-p^2\cos^2\theta}$，这时，$\overrightarrow{OQ'}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PA'}+\overrightarrow{PB'}+\overrightarrow{PC'}$，即 Q' 的坐标为：

$$[p+2k(\theta)\cos\theta-l(\theta)\sin\theta, 0, 2k(\theta)\sin\theta+l(\theta)\cos\theta],$$

即为

$$[\sqrt{2-p^2(1+\sin^2\theta)}\cos\theta-\sqrt{1-p^2\cos^2\theta}\sin\theta, 0,$$
$$\sqrt{2-p^2(1+\sin^2\theta)}\sin\theta+\sqrt{1-p^2\cos^2\theta}\cos\theta].$$

容易验证，$|\overrightarrow{OQ'}|^2=3-2p^2$. 并且当 $\theta=\pi-\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}$ $\left(\text{即}\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}, \cos\theta=-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)$时，得到 Q_1'：$(-\sqrt{3-2p^2}, 0, 0)$；当 $\theta=-\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}$ $\left(\text{即}\sin\theta=-\frac{1}{\sqrt{3}}, \cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)$ 时，得到 Q_2'：$(\sqrt{3-2p^2}, 0, 0)$. 由于当 θ 在$[0, 2\pi]$中取值时，点 Q' 的坐标都是 θ 的连续函数，所以半圆周C上的点皆满足条件，从而球面 S 上的点 Q' 皆满足条件.

因此，所求Q点的轨迹是与已知球同心的一个球面S，它的半径为$\sqrt{3-2p^2}$.（长度单位为已知球半径，$p=|\overrightarrow{OP}|$.）

题 3 为求$f(2^\mu)$，先讨论函数 f, g 的一些性质：

性质 1：$f(1)=1$，$g(1)=2$.

事实上，由题意，数 1 只能被$f(1)$ 或 $g(1)$所取到，但 $g(1)=f[f(1)]+1>1$，所以，$f(1)=1$，并且 $g(1)=f[f(1)]+1=f(1)+1=2$.

性质 2：对于给定的 n，命 k_n 为不等式 $g(x)<f(n)$ 的正整数解的个数，则

$$f(n)=n+k_n.$$

事实上，由假设可知

$$f(1)=1<g(1)<\cdots<g(k_n)\cdots<f(n)$$

是代表$f(n)$个连续的正整数，但另一方面，它显然由n个正整数$f(1),\cdots,f(n)$及k_n个正整数$g(1),\cdots,g(k_n)$所组成，故$f(n)=n+k_n$。

性质 3：若$f(n)=N$，则

(Ⅰ) $f(N)=N+n-1$；

(Ⅱ) $f(N+1)=(N+1)+n$。

事实上，因为$g(n-1)=f[f(n-1)]+1\leqslant f(N-1)+1\leqslant f(N)$及$g(n)=f[f(n)]+1=f(N)+1>f(N)$，所以适合$g(x)<f(N)$的最大整数$x$必为$n-1$。因此

$$f(N)=N+n-1。$$

同理可证：$f(N+1)=N+n+1$。

性质 4：$g(n)=f(n)+n$。

事实上，由性质 3，$g(n)=f[f(n)]+1=[f(n)+n-1]+1=f(n)+n$。

性质 5：$1\leqslant f(n+1)-f(n)\leqslant 2$，

$2\leqslant g(n+1)-g(n)\leqslant 3$！

事实上，不等式$f(n+1)-f(n)\geqslant 1$是显然的。于是$g(n+1)-g(n)=[f(n+1)+n+1]-[f(n)+n]=f(n+1)-f(n)+1\geqslant 2$。不等式$g(n+1)-g(n)\geqslant 2$说明了在$g(n)$与$g(n+1)$之间至少有一个函数$f$的值存在。由此也就说明了在$f(n)$与$f(n+1)$之间至多只含有一个函数$g$的值。所以$f(n+1)-f(n)\leqslant 2$。从而可得$g(n+1)-g(n)\leqslant 3$。

如令$f_n=f(n)$，$g_n=g(n)$，那么从$f(1)=1$出发，利用上面的性质可以把f和g的值逐个推算出来：

$$f_1, g_1, f_2, f_3, g_2, f_4, g_3, f_5, f_6, g_4, f_7, f_8, g_5, \cdots$$

不难发现，这个序列与斐波那契数列*：

$$F_1=1, F_2=2, F_3=3, F_4=5, F_5=8, F_6=13, \cdots$$
$$F_n=F_{n-1}+F_{n-2}, \cdots$$

有密切关系。为此，我们定义一个序列 P_N，规定 P_N 的第 $k(1\leqslant k\leqslant N)$ 项是 f 或 g，视 $k\in f(Z^+)$ 或 $k\in g(Z^+)$ 而定，例如：

$$P_1=\{f\}, P_2=\{f,g\}, P_3=\{f,g,f\},$$
$$P_4=\{f,g,f,f\}, \cdots\cdots$$

并用记号 $P_N P_M$ 表示两个序列 P_N、P_M 的依次合并，即把序列 P_M 衔接于序列 P_N 之末尾。

那么：

$$P_{F_3}=P_3=\{f,g,f\}=P_2P_1=P_{F_2}P_{F_1}$$
$$P_{F_4}=P_5=\{f,g,f,f,g\}=P_{F_3}P_{F_4}$$

一般地，启发我们：$P_{F_{n+1}}$ 是 P_{F_n} 与 $P_{F_{n-1}}$ 的合并：

---

*）所谓斐波那契数列，是指这样的一个数列：

$$F_0=1,\ F_1=1,\ F_2=2,\ F_3=3,\ F_4=5,$$
$$F_5=8,\ F_6=13, \cdots$$

它的通项满足循环方程：

$$F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$$

也就是说，斐波那契数列的每一项 $F_n(n\geqslant 2)$，可以用它前面的两项 F_{n-1} 与 F_{n-2} 的和来表示。

斐波那契数列的通项公式为：

$$F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right].$$

$$P_{F_{n+1}}=P_{F_n}P_{F_{n-1}}$$

也就有 $P_{F_{n+1}}$ 中恰好有 F_n 个 f 值及 F_{n-1} 个 g 值.而且 $F_{n+1}+M$ 与 M 同为 f 值或同为 g 值（$1\leqslant M\leqslant F_n$），这句话也就是等价于等式：

$$f(F_n+r)=F_{n+1}+f(r)\ (1\leqslant r\leqslant F_{n-1}),$$

$$g(F_{n-1}+s)=F_{n+1}+g(s)\ (1\leqslant s\leqslant F_{n-2}).$$

下面我们继续讨论 f、g 的一些性质，以证明这些猜测是正确的：

性质 6：$f(F_{2k-1})=F_{2k}-1$,

$f(F_{2k})=F_{2k+1}$.

我们用数学归纳法来证明性质 6.当 $k=1$ 时有：

$$f(F_1)=f(1)=1=F_2-1,$$

$$f(F_2)=f(2)=3=F_3.$$

假定性质 6 对自然数 k 为真,则由性质 3 可知：

$$f(F_{2k+1})=f[f(F_{2k})]=F_{2k+1}+F_{2k}-1=F_{2(k+1)}-1,$$

$$f(F_{2(k+1)})=f[f(F_{2k+1})+1]=F_{2(k+1)}+F_{2k+1}=F_{2k+3}=F_{2(k+1)+1}.$$

所以对自然数 $k+1$ 亦为真。

性质 6 说明,当 n 为奇数时 F_n 为 f 值；当 n 为偶数时，F_n 为 g 值.

性质 7：若 $k>1$,则 F_k+1 恒为 f 值.

事实上，若 k 为偶数，则 F_k 为 g 值，故 F_k+1 为 f 值；若 k 为奇数,令 $k=2s+1$,则 $F_{2s+1}=f(F_{2s})$，要是 $F_k+1=F_{2s+1}+1=f(F_{2s})+1$ 为 g 值,于是必可表为 $f[f(t)]+1$ 的形式，如此，$F_{2s}=f(t)$ 为 f 值，此为不可能，故 F_k+1 仍

为 f 值。

性质 8：P_{F_n} 中恰有 F_{n-1} 个 f 值和 F_{n-2} 个 g 值。

事实上，若 n 为奇数 $n=2k+1$，则因

$$F_{2k+1}=f(F_{2k}),$$

可知 $P_{F_{2k+1}}$ 中有 F_{2k} 个 f 值，于是 g 值有 $F_{2k+1}-F_{2k}=F_{2k-1}$ 个。

若 n 为偶数 $n=2k$，则由性质 6 知：

$$F_{2k}=f(F_{2k-1})+1=f[f(F_{2(k-1)})]+1$$
$$=g(F_{2(k-1)}),$$

故 $P_{F_{2k}}$ 中有 F_{2k-2} 个 g 值，而有 $F_{2k}-F_{2k-2}=F_{2k-1}$ 个 f 值。总之，在 P_{F_n} 中不论 n 为奇数或偶数，恰有 F_{n-1} 个 f 值，而有 F_{n-2} 个 g 值。

性质 9：$F_{k+1}+M$ 与 $M(1\leqslant M\leqslant F_k)$ 同为 f 值或同为 g 值等价于等式：

$$f(F_k+r)=F_{k+1}+f(r)\quad(1\leqslant r\leqslant F_{k-1}),$$
$$g(F_{k-1}+s)=F_{k+1}+g(s)\quad(1\leqslant s\leqslant F_{k-2}).$$

事实上，如果 $F_{k+1}+M$ 与 M 同为 f 值或同为 g 值，则可写成等式：

$$P_{F_{k+1}+M}=P_{F_{k+1}}P_M.$$

注意到在序列 $P_{F_{k+1}}$ 中恰有 F_k 个 f 值。现在考虑 $P_{F_{k+1}+M}$ 中第 F_k+r 个 f 值，它位于序列 $P_{F_{k+1}+M}$ 的第 $f(F_k+r)$ 项，而它又位于 $P_{F_{k+1}}P_M$ 中的第 $F_{k+1}+f(r)$ 项，故等式：$f(F_k+r)=F_{k+1}+f(r)$ 成立。

同理可得另一等式。

性质 10：当 $n>1$ 时，F_n+M 与 $M(1\leqslant M\leqslant F_{n-1})$ 同为 f 值或同为 g 值。

当 $n=2,3$ 时，可直接检验结论为真。设 $n=k$ 时已为真，当 $n=k+1$ 时，再对 M 用归纳法，由性质 7 可知当 $M=1$ 时已为真，故假定对于 $1\leqslant m\leqslant M$ 已为真。要证明对于 $M+1$ 亦为真。

事实上，若 $M\in g(Z^+)$，$F_{k+1}+M\in g(Z^+)$，则必有：

$$M+1\in f(Z^+),F_{k+1}+M+1\in f(Z^+);$$

又若 $M-1\in f(Z^+)$，$M\in f(Z^+)$ 及 $F_{k+1}+M-1\in f(Z^+)$，$F_{k+1}+M\in f(Z^+)$，势必得出 $M+1\in g(Z^+)$ 及 $F_{k+1}+M+1\in g(Z^+)$。故在这两种情形之下，结论是正确的。剩下来必须考虑当 $M-1\in g(Z^+)$，$M\in f(Z^+)$，及 $F_{k+1}+M-1\in g(Z^+)$，$F_{k+1}+M\in f(Z^+)$ 这一情形。

令 $M=f(r),M-1=g(s)$。

则 $$M=f(r)=r+s,$$

$$f(s)=g(s)-s=(M-1)-(M-r)=r-1。$$

若设 $$f(s+1)=r+t\quad(t=0,1),$$

则 $$g(s+1)-g(s)=(s+1)+(r+t)-(M-1)=t+2.$$

由归纳假定 $F_{k+1}+m(1\leqslant m\leqslant M)$ 与 m 同为 f 值或同为 g 值，故由性质 9 可知：

$$f(F_k+r)=F_{k+1}+f(r)=F_{k+1}+M.$$

且 $$g(F_{k-1}+s)=F_{k+1}+g(s)=F_{k+1}+M-1.$$

又因为
$$\begin{aligned}g(F_{k-1}+s+1)&=F_{k-1}+s+1+f(F_{k-1}+s+1)\\&=F_{k-1}+s+1+F_k+f(s+1)\\&=F_{k-1}+s+1+F_k+r+t\\&=F_{k+1}+M+t+1.\end{aligned}$$

所以 $$g(F_{k-1}+s+1)-g(F_{k-1}+s)$$
$$=t+2=g(s+1)-g(s)。$$

利用这个等式，就可说明若 $t=0$，则：

$$g(s+1)=g(s)+2=(M-1)+2=M+1\in g(Z^+),$$

$$g(F_{k-1}+s+1)=g(F_{k-1}+s)+2=F_{k+1}+M-1+2$$
$$=F_{k+1}+M+1\in g(Z^+),$$

即 $M+1$ 与 $F_{k+1}+M+1$ 同为 g 值。

若 $t=1$，则 $g(s+1)=M+2\in g(Z^+)$，故 $M+1\in f(Z^+)$，

$$g(F_{k-1}+s+1)=F_{k+1}+M+2\in g(Z^+),$$

故 $F_{k+1}+M+1\in f(Z^+)$

即 $M+1$ 与 $F_{k+1}+M+1$ 同为 f 值。

有了以上这些准备，再利用斐波那契数列的性质就可以计算 $f(\mu)$ 了。由性质1、2，即得 $f(1)=1$，$f(2)=3$。对于给定的 $\mu\geqslant3$，一定存在这样的 n，使 $F_{n-1}<\mu\leqslant F_n$。下面我们证明：

$$f(\mu)=\left[\frac{F_n}{F_{n-1}}\mu\right],\ F_{n-1}<\mu\leqslant F_n,\mu\geqslant3 \qquad (1)$$

这里 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数。

用数学归纳法。当 $n=3$ 时，μ 只能等于 3，此时 $f(3)=4$，而 $\left[\frac{F_3}{F_2}\times3\right]=\left[\frac{3}{2}\times3\right]=4$，所以等式成立。

假设对于 $3\leqslant n\leqslant k$ 的 n，(1)式成立，要证明 $n=k+1$ 时也成立。令 $\mu=F_k+M\quad(1\leqslant M\leqslant F_{k-1})$。

若 $M=1$，则一方面由性质9、10可得，$f(F_k+1)=F_{k+1}+f(1)=F_{k+1}+1$；另一方面，由于 $\left[\frac{F_{k+1}}{F_k}\right]=\left[\frac{F_k+F_{k-1}}{F_k}\right]$

$$=\left[1+\frac{F_{k-1}}{F_k}\right]=1,$$

故
$$\left[\frac{F_{k+1}}{F_k}(F_k+1)\right]=\left[F_{k+1}+\frac{F_{k+1}}{F_k}\right]$$
$$=F_{k+1}+\left[\frac{F_{k+1}}{F_k}\right]=F_{k+1}+1。$$

所以，当 $M=1$ 时等式(1)成立。

若 $M=2$，则由于
$$\left[\frac{2F_{k+1}}{F_k}\right]=\left[\frac{2(F_k+F_{k-1})}{F_k}\right]$$
$$=\left[\frac{3F_k+F_{k-1}-(F_k-F_{k-1})}{F_k}\right]$$
$$=3+\left[\frac{F_{k-1}-F_{k-2}}{F_{k-1}+F_{k-2}}\right]=3。$$

及 $f(2)=3$，便可推知等式仍然成立。于是可设 $M\geqslant 3$，并取 l，使：
$$F_{l-1}<M\leqslant F_l \quad (3\leqslant l\leqslant k-1)$$

对于这样的 l，由归纳假定知：
$$f(M)=\left[\frac{F_l}{F_{l-1}}M\right]F_{l-1}<M\leqslant F_l$$

因为M可能取值是 $F_{l-1}+1$、…、$F_{l-1}+F_{l-2}$，所以M必不能被 F_{l-1} 所整除，又因为 F_l 与 F_{l-1} 互素*，故 F_lM 必不能被 F_{l-1} 所整除。用 S 代表$\frac{F_lM}{F_{l-1}}$的分数部分，即：
$$\frac{F_l}{F_{l-1}}M=\left[\frac{F_l}{F_{l-1}}M\right]+S。$$

---

* 若用(a,b)表示两个整数 a与b 的最大公约数，则明显地有：$(F_{l+1},F_l)=(F_{l-1}+F_l,F_l)=(F_l,F_{l-1})=\cdots=(F_1,F_0)=1$。

那么 $$\frac{1}{F_{l-1}} \leqslant S \leqslant \frac{F_{l-1}-1}{F_{l-1}},$$

利用斐波那契数列的一个性质*：

$$\frac{F_k}{F_{k-1}} - \frac{F_{k+l+1}}{F_{k+l}} = \frac{(-1)^k F_l}{F_{k-1}F_{k+l}},$$

---

* 这个性质可对 l 用数学归纳法予以证明。

① 当 $l=0$ 时，即要证明

$$\frac{F_k}{F_{k-1}} - \frac{F_{k+1}}{F_k} = \frac{(-1)^k}{F_{k-1}F_k}.$$

因为 $$\frac{F_k}{F_{k-1}} - \frac{F_{k+1}}{F_k} = \frac{F_k^2 - F_{k-1}F_{k+1}}{F_{k-1}F_k},$$

所以我们只要证明等式：

$$F_k^2 - F_{k-1}F_{k+1} = (-1)^k.$$

对 k 用归纳法。当 $k=1,2$ 时，可直接验证是正确的。设等式对 k 成立，则有

$$\begin{aligned} F_{k+1}^2 - F_kF_{k+2} &= (F_k + F_{k-1})^2 - F_k(F_k + F_{k+1}) \\ &= F_{k-1}^2 + 2F_kF_{k-1} - F_kF_{k+1} \\ &= F_{k-1}^2 + 2F_kF_{k-1} - F_k(F_k + F_{k-1}) \\ &= -F_k^2 + F_kF_{k-1} + F_{k-1}^2 \\ &= -F_k^2 + F_{k-1}F_{k+1} = (-1)^{k+1}. \end{aligned}$$

即等式对 $k+1$ 也成立

② 假定性质对于 $\leqslant l-1$ 时为真，那么对于 l 也成立，因为：

$$\begin{aligned} &F_k/F_{k-1} - F_{k+l+1}/F_{k+l} \\ &= \{F_k(F_{k+l-1} + F_{k+l-2}) \\ &\quad - F_{k-1}(F_{k+l} + F_{k+l-1})/F_{k-1}F_{k+l} \\ &= \{(F_kF_{k+l-1} - F_{k-1}F_{k+l}) + \\ &\quad + (F_kF_{k+l-2} - F_{k-1}F_{k+l-1})\}/F_{k-1}F_{k+l} \\ &= \{(-1)^kF_{l-1} + (-1)^kF_{l-2}\}/F_{k-1}F_{k+l} \\ &= (-1)^kF_l/F_{k-1}F_{k+l}. \end{aligned}$$

就有：$\left|\left(\frac{F_l}{F_{l-1}}-\frac{F_{k+1}}{F_k}\right)M\right|=\left|\left(\frac{F_l}{F_{l-1}}-\frac{F_{l+(k-l)+1}}{F_{l+(k-l)}}\right)M\right|$

$$=\frac{E_{k-l}M}{F_{l-1}F_k}\leqslant\frac{F_{k-1}F_l}{F_{l-1}F_k}.$$

又当$k>l$时，有：

$$F_{k-l}F_l<F_k{}^*,$$

所以
$$\left|\frac{F_l}{F_{l-1}}M-\frac{F_{k+1}}{F_k}M\right|<\frac{1}{F_{l-1}}\quad(k>l)\qquad(2)$$

去掉绝对值符号，从(2)可以得到：

$$\frac{F_{k+1}}{F_k}M<\frac{F_l}{F_{l-1}}M+\frac{1}{F_{l-1}}=\left[\frac{F_l}{F_{l-1}}M\right]+S+\frac{1}{F_{l-1}}$$

$$\leqslant\left[\frac{F_l}{F_{l-1}}M\right]+\frac{F_{l-1}-1}{F_{l-1}}+\frac{1}{F_{l-1}}$$

---

* 这个不等式由下面的等式即可推得：

$$F_k=F_lF_{k-l}+F_{l-1}F_{k-(l+1)}.$$

我们对l用数学归纳法证明这个等式。

① 当$l=1$时，等式为：

$$F_k=F_{k-1}+F_{k-2},$$

即循环方程，显然是成立的；

② 假定等式对于$l-1$成立，则有

$$F_k=F_{l-1}F_{k-(l-1)}+F_{l-2}F_{k-l}$$
$$=F_{l-1}(F_{k-l}+F_{k-(l+1)})+F_{l-2}F_{k-l}$$
$$=(F_{l-1}+F_{l-2})F_{k-l}+F_{l-1}F_{k-(l+1)}$$
$$=F_lF_{k-l}+F_{l-1}F_{k-(l+1)}.$$

即等式对l也成立。

$$=\left[\frac{F_l}{F_{l-1}}M\right]+1,$$

及 $$\frac{F_{k+1}}{F_k}M>\frac{F_l}{F_{l-1}}M-\frac{1}{F_{l-1}}\geqslant\frac{F_l}{F_{l-1}}M-S$$

$$=\left[\frac{F_l}{F_{l-1}}M\right],$$

即 $$\left[\frac{F_l}{F_{l-1}}M\right]<\frac{F_{k+1}}{F_k}M<\left[\frac{F_l}{F_{l-1}}M\right]+1.$$

∴ $$\left[\frac{F_{k+1}}{F_k}M\right]=\left[\frac{F_l}{F_{l-1}}M\right]\quad(k>l),\tag{3}$$

于是 $$\left[\frac{F_{k+1}}{F_k}(F_k+M)\right]=F_{k+1}+\left[\frac{F_{k+1}}{F_k}M\right]$$

$$=F_{k+1}+\left[\frac{F_l}{F_{l-1}}M\right]$$

$$=F_{k+1}+f(M)=f(F_k+M).$$

这样(1)式获得全证。

另一方面，从上面的证明中可以看出，形如(2)的不等式，从而形如(3)的等式，只要 $k>l$，总是成立的。现在任取一个充分大的 $k>n$，就有：

$$\left[\frac{F_n}{F_{n-1}}\mu\right]=\left[\frac{F_{k+1}}{F_k}\mu\right]\quad(k>n),$$

所以 $$f(\mu)=\left[\frac{F_n}{F_{n-1}}\mu\right]=\left[\frac{F_{k+1}}{F_k}\mu\right]\quad(k>n),$$

既然上式对任意大的 $k(k>n)$ 都成立，于是可用

$$\lim_{k\to\infty}\frac{F_{k+1}}{F_k}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

来代替等式：$f(\mu)=\left[\frac{F_{k+1}}{F_k}\mu\right]$中的比值$\frac{F_{k+1}}{F_k}$，可得

$$f(\mu)=\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}\mu\right].$$

从而即有

$$f(2\mu)=[(1+\sqrt{5})\mu].$$

题 4 如图 20-1，设 D 是两圆的切点，E 是 PQ 的中点，连结 AD、BE、PD、BD. 由于 $\triangle ABC$ 是等腰三角形，所以 AD 是 $\triangle ABC$ 外接圆的直径。又因 AB、AC 和 $\triangle ABC$ 的内切圆相切于点 P、Q，所以 $AP=AQ$. 因此 E 点一定在 AD 上，并且 AE 平分 $\angle A$，$AE\perp PQ$. 于是 $\overset{\frown}{PD}=\overset{\frown}{QD}$，$\therefore \angle BPD=\angle EPD$. 又$\because$ PD 是公共边，所以 $Rt.\triangle BPD\cong Rt.\triangle EPD$. $\therefore PB=PE$，$\angle PBE=\angle PEB$.

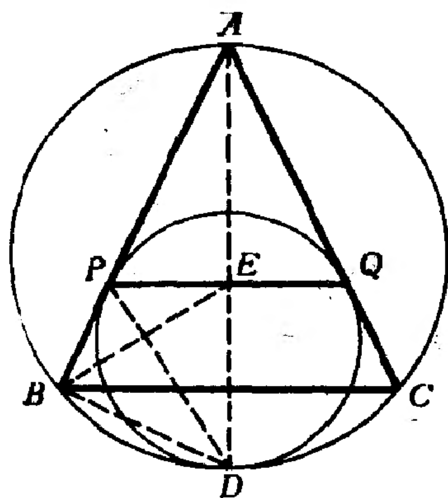


图 20-1

又 $\because AD\perp BC$，$AD\perp PQ$，$\therefore BC\parallel PQ$，$\angle PEB=\angle EBC$，于是有 $\angle PBE=\angle EBC$，即 BE 平分 $\angle ABC$. 因此 E 点是 $\triangle ABC$ 的内心。

题 5 用数学归纳法。

(1) 当 $n=1$ 时，不等式

$$\frac{a_1}{1^2}\geqslant\frac{1}{1} \qquad (a_1 \text{ 是正整数})$$

显然成立。

(2) 假定不等式对于 $n=N$ 时成立，要证明当 $n=N+1$ 时也成立。有两种可能：

① 若 $a_{N+1}\geqslant N+1$，则有

$$\sum_{k=1}^{N+1}\frac{a_k}{k^2}=\sum_{k=1}^{N}\frac{a_k}{k^2}+\frac{a_{N+1}}{(N+1)^2}\geqslant\sum_{k=1}^{N}\frac{a_k}{k^2}+\frac{N+1}{(N+1)^2}$$

$$\geqslant\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k}+\frac{1}{N+1}=\sum_{k=1}^{N+1}\frac{1}{k}.$$

② 若 $a_{N+1}<N+1$，由于 $a_1,a_2,\cdots,a_{N+1}$ 是两两各不相同的正整数，所以至少有某一 $a_i\geqslant N+1(1\leqslant i\leqslant N)$，于是 $a_i>a_{N+1}$，$a_i-a_{N+1}>0$，

$$a_i=a_{N+1}+(a_i-a_{N+1}),\frac{a_i}{i^2}=\frac{a_{N+1}}{i^2}+\frac{a_i-a_{N+1}}{i^2},$$

$$\therefore\quad\sum_{k=1}^{N+1}\frac{a_k}{k^2}=\sum_{k=1}^{N}\frac{a'_k}{k^2}+\left(\frac{a_i-a_{N+1}}{i^2}+\frac{a_{N+1}}{(N+1)^2}\right),$$

其中 $a'_k=\begin{cases}a_k & (k\neq i)\\ a_{N+1} & (k=i)\end{cases}\quad(k=1,2,\cdots,N)$，

即 $a'_1,a'_2,\cdots,a'_N$ 亦为两两互不相同的正整数。按归纳假设，有

$$\sum_{k=1}^{N}\frac{a'_k}{k^2}\geqslant\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k}.$$

又∵ $1\leqslant i\leqslant N<N+1,a_i-a_{N+1}>0$，

$$\therefore\quad\frac{1}{i^2}>\frac{1}{(N+1)^2},\frac{a_i-a_{N+1}}{i^2}>\frac{a_i-a_{N+1}}{(N+1)^2},$$

$$\therefore\quad \frac{a_i - a_{N+1}}{i^2} + \frac{a_{N+1}}{(N+1)^2} > \frac{(a_i - a_{N+1}) + a_{N+1}}{(N+1)^2}$$

$$= \frac{a_i}{(N+1)^2} > \frac{N+1}{(N+1)^2} = \frac{1}{N+1},$$

$$\therefore\quad \sum_{k=1}^{N+1} \frac{a_k}{k^2} > \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} + \frac{1}{N+1} = \sum_{k=1}^{N+1} \frac{1}{k}.$$

由(1)、(2)证得：对任何正整数 n，不等式

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k^2} \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

成立。

题 6 用反证法。假设命题不真，即在任一个国家中，每一个成员的号码都不等于另外两个成员的号码之和，也不等于另一个成员号码的二倍。这时可以证明：任一国中任两成员的号码之差一定不是该国中成员的号码。事实上，设某一国的所有成员的号码为$\{f_n\}$，如若有一个差$(f_i - f_j) \in \{f_n\}$，一定存在f_k，使$f_i - f_j = f_k$，即$f_i = f_j + f_k$。特别地，若$f_j = f_k$，即有$f_i = 2f_j$。这均与反设矛盾。

用 A、B、C、D、E、F 表示六个国家。由于 $1978 = 6 \times 329 + 4$，所以至少有一个国家（不妨设为 A）至少有 330 人，其号码设为

$$a_1 > a_2 > a_3 > \cdots > a_{330}.$$

作差：$a_1 - a_2, a_1 - a_3, \cdots, a_1 - a_{330}$ ……(1)

显然，$a_1 - a_i \overline{\in} A (i = 2, 3, \cdots, 330)$，而 $1 \leqslant a_1 - a_i < 1978$，以(1)中各差为号码的 329 个成员必定在 B、C、D、E、F 这五个国家中。由于 $329 = 5 \times 65 + 4$，所以这五国中至少有一国（设为 B），至少有 66 个以(1)中之差为号码的成员，设为

$b_1 > b_2 > \cdots > b_{66} \quad (b_i = a_1 - a_n)$。

作差：$b_1 - b_2, \cdots\cdots, b_1 - b_{66}$ (2)

显然，$b_1 - b_i \notin B(i = 2, 3, \cdots, 66)$，并且因为 $b_1 - b_i = (a_1 - a_m) - (a_1 - a_n) = a_n - a_m$，所以 $b_1 - b_i \notin A$，因此以(2)中各差为号码的 65 个成员必定在 C、D、E、F 四个国家中。由于 $65 = 4 \times 16 + 1$，所以这四国中至少有一国（设为 C），至少有 17 个以(2)中之差为号码的成员，设为

$c_1 > c_2 > \cdots > c_{17}$。

作差：$c_1 - c_2, c_1 - c_3, \cdots, c_1 - c_{17}$ (3)

显然，$c_1 - c_i \notin C$，并且 $c_1 - c_i \notin A \cup B(i = 2, 3, \cdots, 17)$，因此以(3)中各差为号码的16个成员必定在 D、E、F 三个国家中。由于 $16 = 3 \times 5 + 1$，所以这三国中至少有一国（设为 D），至少有 6 个以(3)中之差为号码的成员，设为

$d_1 > d_2 > \cdots > d_6$。

作差：$d_1 - d_2, d_1 - d_3, \cdots\cdots, d_1 - d_6$ (4)

显然，$d_1 - d_i \notin D$，并且 $d_1 - d_i \notin A \cup B \cup C$，$(i = 2, 3, \cdots 6)$，因此，以(4)中各差为号码的 5 个成员必定在 E、F 两个国家中。由于 $5 = 2 \times 2 + 1$，所以这两国中至少有一国（设为 E），至少有 3 个以(4)中之差为号码的成员，设为

$e_1 > e_2 > e_3$ (5)

再作差：$e_1 - e_2, e_1 - e_3$，显然，$e_1 - e_i \notin A \cup B \cup C \cup D \cup E(i = 2, 3)$，只有 $e_1 - e_2 \in F$，$e_1 - e_3 \in F$，由此可以推出：$e_2 - e_3 = (e_1 - e_3) - (e_1 - e_2) \notin F$，并且 $e_2 - e_3 \notin A \cup B \cup C \cup D \cup E$，即 $e_2 - e_3 \notin A \cup B \cup C \cup D \cup E \cup F$，但 $1 \leqslant e_2 - e_3 < 1978$，应该是一个成员的编号，推出的矛盾说明反设不真，于是命题得证。